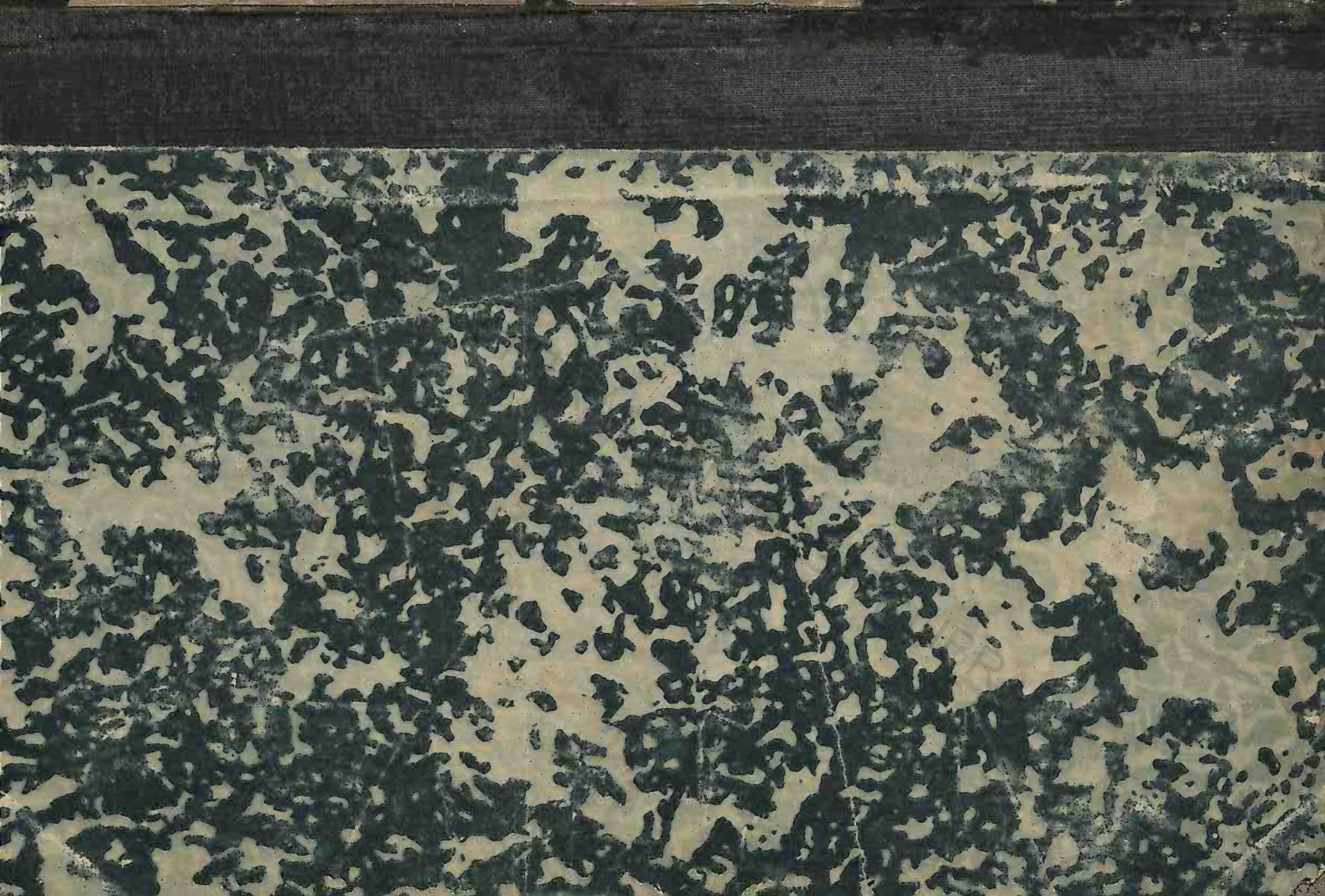


BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

HIDRAULICA TEORETICĂ
(MECANICA FLUIDELOR)
ȘI APLICATĂ

de

Ing. D. GERMANI
Profesor la Politechnica
din București

Vol. I

PARTEA INTRODUCTIVA
HIDRO- ȘI AEROSTATICA

Universitatea din Iași
Bibliotecă Centrală
1946:97

BUCUREȘTI
1942

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PREFAȚĂ.

La capătul unei lungi cariere didactice, credem că facem operă utilă, punând în formă mai completă la îndemâna atât foștilor noștri elevi cât și viitorilor ingineri, rodul experienței și activității noastre de profesor la Școala Politechnică din București.

Volumul de față este primul din o serie de 5 volume, în cari ne-am propus să publicăm cursul nostru de *Hidraulica Teoretică și Aplicată* și de *Complemente de Hidraulică*, care, în decursul anilor și al diverselor ediții litografiate, a suferit adăugiri și desvoltări, unele destinate cu deosibire studenților Facultății de Construcții, altele celor dela Facultatea de Mecanică și Electricitate.

In dorința de a face lucrarea tipărită folositoare unui cerc cât mai larg de technicieni, pe cari i-ar putea interesa oricare din numeroasele capitole ale acestei discipline, am căutat a da o mai mare extindere materiei, însoțind textul și de numeroase probleme și exerciții de aplicațiune. Acestea au fost împrumutate în cea mai mare parte din cărțile streine și în special din excelenta colecție *Wittenbauer*, devenită clasică, cu adaptarea, unde a fost nevoie, la spiritul și metoda întrebuințate în curs, cari, după părerea noastră, constituesc titlul principal al acestei lucrări.

Materia tratată este împărțită astfel:

Vol. I: Partea Introductivă, Hidro- și Aerostatica.

„ II: Hidrodinamica fluidelor perfecte (și a celor naturale, însă în mișcări la cari nu apare viscozitatea în calcule).

„ III: Hidrodinamica fluidelor cu considerarea viscozității.

„ IV: Aplicațiuni technice ale Hidraulicei în domeniul construcțiilor, instalațiilor și mașinilor.

Un al cincilea volum complementar va cuprinde elemente de calcul vectorial și tensorial, noțiuni de teoria funcțiilor și tratarea adecuată a legilor de similitudine mecanică, indispensabile

pentru ușoara înțelegere și asimilarea cunoștiințelor mai avansate ale Hidrodinamicei.

Teoriile noi ale acestei ramuri a Mecanicei Raționale sunt introduse astăzi, în mod curent, la toate Politechnicele din Apus, formând bazele mai temenice ale marilor aplicațiuni technice și industriale ale Hidraulicei și servind totdeodată ca introducere la studiul Aerodinamicei, a cărei parte de pură specialitate a luat în ultima vreme o desvoltare considerabilă.

Invățământul teoretic, pe care se reazemă oricare disciplină technică, cuprinde o parte fizică și o parte matematică. La orice problemă, având pronunțat acest dublu caracter, importă a se preciza mai întâi imagina fizică a fenomenului, punându-se în evidență ceeace este mai esențial, adică parametrii principali ce intră în joc, în opoziție cu cei accesorii, pe cari uneori suntem siliți a-i neglija, cel puțin la început, spre a înlesni calculul sau a-l face măcar posibil. Urmează apoi tratarea matematică a problemei și confruntarea rezultatelor cu realitatea sau verificarea lor experimentală, cari eventual conduc la o completare sau o retușare a formulelor.

Nicăeri poate, ca în Hidrodinamică, matematicele superioare n'au adus așa de mari servicii, pentru lămurirea, uneori cu un minimum de experiențe și încercări, a multor fenomene ce se credeau nepătrunse, precum și pentru progresul aplicațiunilor practice.

De aceea, cultivarea științei pure nu trebue socotită ca un simplu exercițiu de speculațiuni abstracte, de cari Technica s'ar putea dispensa, ci având de scop să ne procure instrumente din ce în ce mai fine, pentru a ne ajuta la simplificarea și perfecționarea lucrului gândirei, la reducerea trudei și costului experiențelor.

De pildă, pentru constatarea pe cale experimentală a faptului că scurgerea prin deversor ascultă de similitudinea mecanică, s'a recurs în unele laboratoare la încercări numeroase și minuțioase, de cari n'ar fi fost deloc nevoie, deoarece teoria completă a legilor de similitudine mecanică poate conduce la acest rezultat direct, adică pe cale de raționament, după cum în geometrie nu este cazul a se cerceta prin măsurători faptul că sferele sunt figuri asemenea.

Din istoricul sumar al desvoltării organice a Hidro- și Aerodinamicei, adăugat la finele volumului, rezultă clar cât de fericită a fost colaborarea strânsă dintre matematică și technica turbinelor și aeroplanelor, în care s'au realizat în ultimul timp progrese uimitoare.

După o întrerupere de un secol, în care ecuațiile cu derivate parțiale ale lui *Euler* au rămas oproape uitate, iar Hidraulica devenise o disciplină empirică, împovărată cu un număr nesfârșit de coeficienți, determinați cu un lux de experiențe, astăzi între teoria clasică și cele mai gingașe aplicațiuni o punte largă s'a întins, atât în profitul științei însăși cât și al realizărilor practice.

Evident că pentru educația științifică a începătorilor în inginerie, cari au atâtea de învățat, trebuie economisit timpul și evitat teoriile cu caracter speculativ. „Beaucoup de science, mais en vue des applications" spune savantul *Bouasse* într'una din interesantele sale prefațe. Mărginirea materiei teoretice însă trebue făcută cu discriminare, fiindcă renunțarea la un capitol mărunt al științei matematice poate să ne priveze de un instrument prețios și să ne aducă desarmați în fața dificultăților, ce nu vor întârzia să apară în calea aplicațiunilor.

De aceste principii am fost călăuziți atât la catedră cât și la întocmirea prezentei lucrări, străduindu-ne a prezenta lucrurile cât mai simplu, clar și precis, dar și cu suficientă riguare, fără a ocoli obstacolele.

De sigur există astăzi numeroase cărți excelente asupra materiei aici tratate, unele foarte savante și greu abordabile, depășind pregătirea și scopurile inginerului, altele cu o tratare technică bogată, dar cu mai puțină riguare științifică. Învățământul technic credem că trebue să urmeze calea de mijloc.

La orice carte nouă, care tratează o materie astăzi clasică în fundarea ei teoretică, consultarea și folosirea literaturei existente este nu numai o necesitate ci chiar o datorie.

Bibliografia care însoțește fiecare volum arată autorii principali pe cărе i-am consultat și folosit la diversele capitole ale volumului, indicate în paranteză, ceeace credem că ne dispensează de a-i mai cita la locurile corespunzătoare.

Prezentul volum cuprinde 12 capitole.

In cap. I și II, cari formează partea introductivă, se expun proprietățile mecanice și fizice ale fluidelor, în special ale apei și aerului, și se stabilesc ecuațiile fundamentale și metoda pentru atacarea problemei generale a Hidrodinamicei fluidelor perfecte.

Restul volumului este consacrat echilibrului, cuprinzând Statica lichidelor și Statica gazelor, în special a aerului, cu principalele lor aplicațiuni, după cum urmează:

Cap. III: Teoria generală a Hidrostaticei.

„ IV și V: Echilibrul lichidelor și calculul presiunilor pe pereți.

Cap. VI și VII: Teoria corpurilor cufundate și a corpurilor plutitoare, suficient de desvoltată pentru a putea interesa și pe technicienii navali.

„ VIII: Calculul eforturilor în pereți subțiri de rezervoare, generalizat și sistematizat, după o lucrare pe care am publicat-o în 1916 în Buletinul Soc. Politechnice.

„ IX: Capilaritatea.

„ X: Repausul relativ, studiu util la diverse aplicațiuni mecanice și industriale.

„ XI: Statica gazelor și studiul mecanic al atmosferei, care își găsește locul potrivit în acest capitol.

„ XII: Statica aerostatelor, capitol util la studiul Aeronauticei etc.

Terminăm aducând mulțumirile noastre deosibite elevului inginer *Victor Bradler* pentru osteneala neprecupețită pe care și-a dat-o cu transcrierea manuscrisului, întocmirea figurilor și diversele corecturi.

D. Germani.

Iulie 1942.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBLIOGRAFIE

PRIVITOARE LA VOL. I.

(In paranteză se arată capitolele din volum, în cari autorii respectivi sunt folosiți)

1) *Paul Appel.* Mécanique Rationelle Vol. III, 1909, Gauthier-Villars, Paris.
2) *Lecornu.* Mecaniqe, 1914. Idem. **(Cap VII).**
3) *H. Poincaré.* Potentiel Newtonien, 1893. Idem **(Cap. II).**
4) *H. Poincaré.* Théorie des tourbillons, 1893 **(Cap II).**
5) *H. Lamb.* Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von E. Helly, 1931 **(Cap. II).**
6) *Dr. Franz Prásil.* Techniche Hydrodynamik 1926. Iulius-Springer, Berlin **(Cap. I, V, X).**
7) *H. Lorenz.* Technische Hydromechanik. Oldenburg, München und Berlin **(Cap. III, VII, VIII, IX, Privire istorică).**
8) *Iohow Foerster.* Hilfsbuch für den Schiffbau. Iulius Springer, Berlin. I 1928 **(Cap VII).**
9) *H. Poincaré.* Capillarité, 1895 **(Cap. IX).**
10) *Prandtl-Tietjens* Hydro-und Aeromechanik I, 1929. Iulius-Springer, Berlin **(Cap XI).**
11) *Wittenbauer:* Aufgaben aus der technishen Mehanik 1917 III. Iulius Springer, Berlin **(Cap. XI** și majoritatea aplicațiilor),
12) *Dr. Ing. Theodor Pöschl.* Lehrbuch der Hydraulik 1924. Iulius Springer, Berlin. **(Aplic.: 4, 10, 11, 25, 38, 24).**
13) *Dr. Ing. Walther Kaufmann.* Angewandte Hydromechanik I. 1931 **(Aplic. 23).**
14) *Dr. Max Plank.* Thermodynamik 1930. Walter de Gruyter et Co, Berlin, Leipzig **(Aplic. 6).**
15) *Kohlrausch.* Lehrbuch der praktischen Physik 1921. Teubner, Leipzig, Berlin **(Cap. XI).**

BUCUREȘTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

16) *Dr. Ing. Roland Eisenrohr.* *Flugtechnisches Handbuch.* Band IV. Atmosphäre, Wetter, etc. 1937. Walter de Gruyter & Co, Berlin **(Cap. XI, XII).**

17) *W. E. Durand.* Aerodynamic Theory I 1934. Iulius Springer, Berlin, Leipzig **(Cap. XI).**

18) *Alex. Veronnet.* Constitution physique des étoiles 1938. Gauthier-Villars, Paris **(Cap. XI).**

19) *A. Berliner u. K. Scheel.* Physikalisches Handwörterbuch 1932. Iulius Springer, Berlin **(Cap. XI).**

20) *N. Joukowscki.* Aérodynamique, traduct'on par *S. Drezewiscki,* 1916. Gauthier-Villars, Paris **(Privire istorică).**

21) *D. Germani.* Calculul eforturilor în pereți flexibili mărginind o masă lichidă. Bul. Soc. Polit. XXXII, No. 1 și 2/1916 **(Cap. VII).**

22) *D. Germani.* Essai d'une théorie élémentaire des déformations et des efforts intérieurs d'un fluide incompressible. Bul. Politechnicei din București No. 1 și 2/941 **(Cap. I).**

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

TABLA DE MATERIE

Prefață V
Bibliografie IX
Notații XV
Errata XIX

PARTEA INTRODUCTIVĂ

CAP. I. **Obiect, Definițiuni, Proprietățile fluidelor.**

Pag.

1 — Obiectul Hidraulicei 3
2 — Caracterele principale ale corpurilor din punct de vedere mecanic 4
3 — Viscozitate 7
4 — Apa 14
5 — Gaze. Aerul 21
6 — Ecuația caracteristică 22
Aplicații 24

CAP. II. **Ecuațiile fundamentale ale hidrodinamicei.**

1 — Procedeul întrebuințat în studiul fluidelor 27
2 — Variabilele lui Lagrange și variabilele lui Euler 28
3 — Mișcări de diferite feluri 30
4 — Determinarea stării de mișcare a unui fluid în ambele sisteme de variabile 31
5 — Expresia acceleratiei în ambele sisteme de variabile 32
6 — Ecuațiile unui fluid perfect 36
7 — Producere instantanee de cantitate de mișcare 51
8 — Ecuațiile lui Lagrange 52
9 — Transformarea lui Weber 53
10 — Problema generală a Hidrodinamicei în cazul fluidelor perfecte . 55

HIDROSTATICA.

CAP. III. **Teoria generală a Hidrostaticei.**

1 — Ecuația mecanică fundamentală 58
2 — Condiționarea echilibrului de natura câmpului forței exterioare . 59

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.

3 — *Potenţialul în cazul unui câmp newtonian* 61
4 — *Proprietăţile suprafeţelor echipotenţiale, atât în câmp liber cât şi prin o masă fluidă* 64
5 — *Legea hidrostatică* 66
6 — *Echilibrul unei mase fluide, izolată în spaţiu; câmp radial* . . 66

CAP. IV **Echilibrul lichidelor în câmpul gravitaţiunii, presupus uniform.**

1 — *Presiuni în masa unui lichid. Tub piezometru* 73
2 — *Eliminarea presiunii atmosferice din formule. Tub piezometric deschis* 78
3 — *Măsurarea presiunilor* 79
4 — *Presiuni interioare în lichide cu densităţi diferite* 82
5 — *Principiul lui Pascal* 85

CAP. V. **Presiunea unui lichid în repaus pe pereţi udaţi.**

1 — *Pereţi plani* 86
2 — *Pereţi de orice formă* 90
Aplicaţii 98

CAP. VI. **Corpuri cufundate într'un fluid în repaus.**

1 — *Presiune uniformă* 113
2 — *Presiuni rezultante ale fluidului înconjurător* 131
3 — *Stabilitatea corpurilor cufundate într'un lichid* 116
Aplicaţii 118

CAP. VII. **Echilibrul, stabilitatea şi oscilaţiile corpurilor plutitoare.**

1 — *Definiţiuni* 120
2 — *Mişcarea verticală a unui corp cufundat sau plutitor* . . . 121
3 — *Echilibrul unui plutitor* 125
4 — *Studiul geometric al plutitorului* 126
5 — *Numărul poziţiilor de echilibru* 133
6 — *Complement geometric* 135
7 — *Tratarea problemei stabilităţii corpurilor plutitoare prin considerarea energiei potenţiale* 144
8 — *Oscilaţiuni de rotaţie în jurul poziţiilor de echilibru stabil* . . 148
9 — *Curbe de stablitate* 155
10 — *Aplicaţie la vasele navigabile* 158
11 — *Studiul practic al stabilităţii* 161
12 — *Teorema lui Leclert* 174
13 — *Influenţarea stabilităţii prin variaţia greutăţei* 176
14 — *Formula lui Dupin* 177
15 — *Carene suplimentare* 180
Aplicaţii 182

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Pga.

CAP. VIII. **Calculul eforturilor în pereţi subţiri, flexibili şi inextensibili, supuşi presiunei hidrostatice.**

1 — Suprafaţă cu simplă curbură. Pânză dreptunghiulară formând perete cilindric 203
2 — Suprafeţe de pereţi cu dublă curbură 209
3 — „ „ „ în forme de rotaţie 214
Aplicaţii 222

CAP. IX. **Capilaritate şi tensiune superficială**

1 — Privire teoretică 235
2 — Exemple 238
Aplicaţie 242

CAP. X. **Repaus relativ.**

1 — Generalităţi 243
2 — Ecuaţia şi condiţiile repausului relativ 243
3 — Lichid cu suprafaţă liberă într'un vas antrenat 253
4 — Vas închis antrenat, complet plin cu lichid 262
5 — Corpuri plutitoare în repaus relativ 266
Aplicaţii 269

AEROSTATICA.

CAP. XI. **Statica gazelor.**

1 — Presiunea gazelor şi măsurarea ei 275
2 — Legile gazelor 277
3 — Repartiţia presiunei şi densităţii într'o masă de gaz sau vapori în echilibru. Cazul special al atmosferei 286
4 — Atmosfera reală 292
5 — Atmosfera standard 299
6 — Influenţa diferiţilor factori asupra stabilităţii atmosferei. Consideraţiuni metereologice 303
Aplicaţii 315

CAP. XII. **Statica aerostatelor.**

1 — Aerostatul cu volum constant 329
2 — Aerostat cu greutate constantă (flasc sau sbârcit). 340
3 — Navigaţia aerostatului 345
4 — Balonul captiv şi guiderope. Aplicaţie la submarine 349
5 — Câteva ascensiuni cu balonul în scopuri ştiinţifice 351
Aplicaţii 352
PRIVIRE ISTORICĂ 363

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

NOTAȚII

PENTRU VOL I (CAP. I—XII)

A = constantă.

a = înălțimea baricentrului G deasupra centrului de carenă C (VII); gradient de temperatură (XI).

B = constantă.

C = constantă; coeficientul forțelor de atracție (III); centru de carenă (VII); grade Celsius; căldură specifică sub presiune constantă (XI).

(C) = suprafața centrelor de carenă.

c = vitesa sunetului (I); căldura specifică sub volum constant (XI).

D = diametru; determinant funcțional de transformare (II).

d = distanță; diametru; densitate față de apă (VII).

E = modul de elasticitate la solide; energia internă a unității de masă gazoasă (II).

e = baza logaritmilor naturali.

F = intensitatea câmpului raportată la unitatea de masă; forța ascensională (XII); forță.

F' = intensitatea câmpului raportată la unitatea de volum; impulsiunea intensității F, adică $F' = \int_\tau F dt$ (II).

f = funcție; efort elementar (I); lest (XII).

G = centru de greutate (baricentru); greutate.

G_0 = greutate.

g = accelerația gravității.

H = înălțime; înălțimea atmosferei omogene (XII).

h = înățime; înălțime piezometrică.

h_0 = adâncime medie de imersiune.

I = momentul de inerție al unei suprafețe.

i = unghiu de înclinare (VII).

J = echivalentul mecanic al căldurei.

j = accelerație cu proecțiile j_x, j_y, j_z.

k = constantă; rază de giraţie polară (VII).

L = lungime (de undă VII); lăţime.

l = lungime; l cu m şi n = cosinusuri directoare ale normalei $\bar{n}$ (II); înălţimea metacentrului (VII).

M = masă; moment; constantă (VII).

$\mathcal{M} = I_{x,y}$ = moment de inerţie centrifug al unei suprafeţe.

$m = \rho V$ = masă, cosinus director după axa Oy a normalei $\bar{n}$ (II).

N = constantă (VII).

n = normală; numărul normalelor într'un punct al unei suprafeţe (VII); cosinus director după axa Oz a normalei $\bar{n}$ (II).

O = origină de axe.

o = „ „ „ .

P = rezultanta presiunilor pe o suprafaţă (V); greutate; putere (în aplicaţii).

(P) = suprafaţă de plutire.

p = presiune unitară (pe unitatea de suprafaţă); p, q, r, s, t = derivatele parţiale ale lui z din ecuaţia unei suprafeţe $z = f(x, y, z)$, (VII); p, q, r = componentele vitesei de rotaţie $\bar{\omega}$ (X).

p' = presiune unitară; $p' = \int_\tau p\,dt$ implusiune de presiune (I

Q = cantitate de căldură în calorii; rezultanta presiunei atmosferice pe o suprafaţă (V); forţă (aplicaţii).

$q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ la o suprafaţă (VII); componenta vitesei de rotaţie $\bar{\omega}$ după axa Oy (X).

R = resultantă; rază de curbură, iar R_1, R_2 razele principale de curbură (VII); constanta unui gaz (IX); rază.

$\mathcal{R}$ = ruptură de echilibru (XII).

r = rază; rază vectoare; distanţa între două surse elementare, rază de giraţie (V); rază de curbură a urmei unui cilindru de contur aparent al suprafeţei (P), (VII); rază vectoare a indicatricei $r = \sqrt{R}$; $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (VII).

S = efort pe unitatea de lungime.

s = lungime de arc; $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ (VII).

T = energie cinetică (II); durata unei perioade (VII); temperatura absolută (XI).

t = timpul; $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (VII).

U = potenţialul forţei exterioare.

u = vitesă, în general alta de cât v a unei molecule.

V = energia potenţială datorită câmpului exterior (II).

$V > v$ = volumuri; uneori V = vitesa unui corp (I).

v = volumul unităţei de greutate $= \frac{1}{\varpi}$.

v = vitesa unei molecule cu proecţiile: v_x, v_y, v_z; orice vitesă.

W = energie internă (II); energia potenţială datorită câmpului exterior (VII) ca şi V la (II).

X, Y, Z = coordonate cartesiene (ale centrelor de presiune prevăzute cu indici (V).

x, y, z = coordonate cartesiene curente (ale baricentrelor sunt prevăzute cu indici).

Z = plafonul aerostatului (XII).

z = cordonată, cota deasupra planului orizontal de referinţă.

z_C = cota centrului de presiune C.

z_G = „ baricentrului G.

α = coef. de absorbţie (proporţie volumetrică de gaz la $\theta = 0^0$ şi $p_0 = 760\ mm\ Hg$) a unui gaz în apă (I); unghiu de înclinaţie (VII); ori ce alt unghiu (VIII).

β = unghiu.

Γ = acceleraţie de translaţie (XI).

γ = raportul $\frac{C}{c}$ dintre căldurile specifice sub presiune şi volum constant; acceleraţie datorită rotaţiei (X); unghiu (I), (XI).

Δ = diferenţă (elementară sau finită).

δ = unghiu.

ε = modul de elasticitate la fluide (I).

ζ = coordonată cartesiană (în special faţă de axe $O\xi\eta\zeta$ fixe, X); coeficient de rezistenţă a aerului din formula $R = \zeta\rho S v^2$ (aplicaţii, XII).

η = coordonată cartesiană din notaţia $O\xi\eta\zeta$.

Θ = amplitudinea unei oscilaţi unghiulare θ.

θ = temperatură în grade centigrade; unghiu; unghiu de racordare (IX).

$\varkappa$ = coeficient de compresibilitate (I); exponent politropic (XI, XII). egal cu γ la fenomenele adiabatice.

μ = coeficient de viscozitate.

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ coeficient de viscozitate cinematic (I); pulsaţia proprie a oscilaţiunilor verticale sau rotative (VII).

$\xi, \eta,$ = coordonate cartesiene faţă de axa de inclinaţie şi o perpendiculară pe ea (VII); în general faţă de axe fixe (X).

Ξ, H = coordonate cartesiene faţă de axe paralele trecând prin baricentrul G sau, împreună cu Z, în general faţă de axe fixe (X).

o, O = origina axelor de mai sus.

π = raportul între circumferinţă şi diametru.

ϖ = greutate volumică (specifică).

ρ = densitate; rădăcinile ecuaţiei caracteristice a unei ecuaţiuni diferenţiale (VII); raza de curbură a urmei unui cilindru de contur aparent al suprafeţei (C), (VII).

σ = efort normal (I); suprafaţă, ca şi Ω, (II).

τ = „ tangenţial (I); volum, ca şi V; interval de timp foarte scurt (II).

$\mathfrak{T}$ = lucru mecanic.

Φ = coeficient din formula de rezistenţă a aerului $R = \Phi u^2$ (IIX)

Φ = coeficent de frecare analog (XII).

φ = funcţie; unghiu (VII).

χ = funcţie (oarecare sau în particular funcţia lui *Weber*) (II) unghiu (VII).

ψ = funcţie oarecare, unghiu (VII).

ω = vitesă unghiulară de rotaţie; pulsaţia unor oscilaţiuni forţate (VII şi X).

Ω = suprafaţă sau orice arie de secţiune, ca şi σ (II).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ERRATA

Pentru lista, oarecum lungă, de errata *care se datoreşte în mare parte condiţiilor grele în cari s'a făcut tipărirea, solicităm indulgenţa cititorilor, pe cari îi mai rugăm să binevoiască a ne semnala şi ori ce altă eroare, care va fi trecut neobservată, în vederea unei noi ediţii mai îngrijite.*

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
IX	6 de sus	Mecaniqe	Mécanique
„	11 „ „	Techniche	Technische
„	11 „ jos	Mehanik	Mechanik
X	8 „ „	*Joukowscki*	*Jukowski*
„	8 „ „	*Drezewiscki*	*Drzewicki*
5	19 de jos	coeziune	coeziune*)
12	14 „ sus	acest	acest din urmă
12	6 „ jos	în diferitele	după diferitele
16	18 „ sus	n	în
16	5 „ jos	*modul*	*modulul*
17	4 „ sus	Hidrodinamicei	Hidrodinamicei)
22	16 „ „	pres une	presiune
23	14 „ „	ş	şi
28	11 „ „	, rezultă	t, rezultă
44	14 „ „	$\frac{dz}{dt}$	$\frac{d\varrho}{dt}$
48	5 „ „	$v_2 = v_1$	$\bar{v}_2 = \bar{v}_1$
50	12 „ „	la p	la p.
59	13 „ „	fracţiuni	funcţiuni
65	13 „ jos	n	în
66	4 „ sus	înt 'un	într'un
66	8 „ jos	iţalului	ţialului
67	1 „ sus	supraţeţe	suprafeţe
68	17 „ „	$\imath = d = R$	$r = d = R$
68	6 „ jos	nteriorul	interiorul
70	2 „ „	sa'ranula	s'ar anula

*) Mica coeziune datorită viscozităţei şi care la lichide uşor se manifestă, la gaze este mascată de expansibilitatea sau compresiunea mereu prezentă.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
74	3 „ jos	azeşate	aşezate
76	15 „ „	înainţe	înainte
78	8 „ sus	kilogran ul	kilogramul
79	6 „ „	s'a mai spus mai	s'a spus mai
85	6 „ „	*volumic.*	*volumice.*
86	5 „ jos	rezulat	rezultat
87	13 „ sus	Ω_z şi Ω_x	Ω_x şi Ω_z
87	20 „	proeicţie	proiecţie
90	1 „ „	a făşiei pe	a făşiei de
91	13 „ jos	considrată	consideratã
93	14 „ sus	$= \int zx\, d\Omega_z$	$= \varpi \int zx\, d\Omega_z$
94	8 „ jos	direţie	direcţie
95	4 „ sus	foţelor	forţelor
98	1 „ „	menţionat	menţionat poate
100	9 „ „	d g.	dig.
100	10 „ jos	($\Omega \sin \alpha$)	$\sin \alpha$
101	5 „ sus	d n punctul	din punctul
101	3 „ jos	Inte-	Inter-
101	2 „ „	rescţia	secţia
102	16 „ sus	mase,	mase
103	7 „ jos	α''	α'
103	6, 4, 1 de jos	$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $tg\, \alpha$	$\sin \alpha'$, $\cos \alpha'$, $tg\, \alpha'$
103	2 de jos	optimă	optimă α'
103	1 „ „	σ_0	σ
104	15 de sus	( ),	( );
104	16 „ „	tota ă	totală
104	15 „ jos	asup a	asupra
105	12 „ „	centrui	centrul
109	7 „ „	ar	iar
110	12 „ sus	int 'un	într'un
120	10 „ jos	*Aerome-*	*Areome-*
121	colontitlu	c fundat	cufundat
125	3 de sus	depăseşte	depăşeşte
126	14 „ „	$\frac{V}{V_0} \quad \frac{\varpi_0}{\varpi}$	$\frac{V}{V_0} = \frac{\varpi_0}{\varpi}$
126	14 „ jos	*izocarne*	*izocarene*
128	12 „ „	Fig. 80	Fig. 79 bis
129	14 „ sus	Fig. 80	Fig. 79 bis şi 80
129	sub figură	Fig. 79	Fig. 79 bis
130	15 de sus	figura 78	Fig. 79
130	17 „ „	η	$\eta\eta$

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
130	21 „ „	iar pe altă	iar pe de altă
130	2 „ jos	Fig. 78	Fig. 79
131	12 „ sus	melor	malelor
132	17 „ jos	metracentrul	metacentru
134	1 „ sus	pentru uni	pentru a uni
134	18 „ jos	şi al	şi a
146	1 „ sus	z şi x	z şi ξ
149	colontitlu	chilibru	echilibru
149	13 de sus	concide	coincide
156	10 „ jos	(c)	(C)
158	11 „ sus	dianainte	dinainte
158	6 „ jos	metacentrelor	metacentrică
159	colontitlu	navigabi e	navigabile
163	10 de jos	fig. 93	fig. 101
164	1 „ sus	lunngime	lungime
165	1 „ „	prim R	prin R
165	4 „ „	fiind obişnuit mai mică: $h=2r$	$h=2r$ fiind obişnuit mai mică ca $2R$
167	9 „ jos	descrie-	descri-
168	9 „ „	$x=R\varphi+r\sin\varphi$	$x=R(\varphi+2\pi)+r\sin\varphi$
171	6 „ „	veticalei	verticalei
174	7 „ sus	vezi fig. 103	vezi fig. 92
179	4 „ „	normalalele	normalele
179	11 „ „	şi A_2.	A_2.
179	6 „ jos	cc' din	cc' în
179	4 „ „	planul de plutire	planul de apă
180	10 „ sus	*curbura*	*curba*
182	2 „ jos	va da	va lua naştere
183	13 „ „	frecare B	frecare în B
185	6 „ sus	*oric formă*	*orice formă*
185	16 „ „	putând-se	putându-se
185	18 „ „	Rezultantanta	Rezultanta
190	10 „ jos	stabilim ecaţia	stabilim ecuaţia
192	3 „ sus	şi *0281*	şi *0,281*
192	13 „ „	şi *0 281*	şi *0,281*
192	16 „ „	absolute	absolut
196	15 „ jos	atr buindu-i	atribuindu-i
198	7 „ „	invaribabilă	invariabilă
202	4 „ „	lin a	linia
203	12 „ „	A se trece titlul: Pânză etc., după: 1) Suprafaţă cu simplă curbură.	
210	4 „ sus	pe *s.*	pe *s).*

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
210	18 „ jos	natația	notația
213	20 „ „	$z \neq 0$	$z > 0$
213	4 „ „	eforturi	de eforturi
213	3 „ „	novoe	nevoe
214	16 „ sus	chilibru	echilibru
216	pe figură	$\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$
222	6 de jos	cilintrul	cilindrul
226	5 „ sus	corespuuzând	corespunzând
236	2 „ jos	iflexibilă	inflexibilă
236	1 „ „	poteză	ipoteză
238	coloutitlu	s perficiala	superficială
238	7 de jos	ginâ	gina
241	11 „ sus	aprox.	aproximativ
242	6 „ „	Nr. 47	Nr. 48
242	7 „ „	srprafețele	suprafețele
242	9 „ „	ieă în *F*	iese în *F*
242		pe figură s'a omis litera *F* dela gura tubului.	
244	3 de sus	repa-	rapau-
244	4 „ „	usul	sul
246	18 „ „	*acelerație*	*accelerație*
247	9 „ „	atunc	atunci
247	2 de jos	scala	scalar
247	1 „ „	punct	punct sau prin nimic
248	10 „ „	$g' - \Gamma - \gamma$	$\overline{g'} - \overline{\Gamma} - \overline{\gamma}$
249	1 „ sus	can-	canti-
250	13 „ jos	impus	impusă
250	13 „ „	nececitate	necesitate
252	15 „ „	penfru	pentru
253	14 „ sus	acceleraţiune	accelerațiune
253	10 „ jos	Γ	$\overline{\Gamma}$
255	11 „ sus	eădea	cădea
257	7 „ „	suprafăță	suprafață
257	11 „ jos	suprafeţeţei	suprafeței
357	5 „ „	simultan, şi	simultan şi
258	9 „ sus	aest	acest
260	6 „ „	tizate	zate
262	22 „ jos	suprafele	suprafețele
265	1 „ sus	libra,	libra
266	19 „ „	ocilaţiunile	oscilațiunile
269	13 „ „	*Lofodfen*	*Lofoden*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
272	20 „ jos	ungiular	unghiular
272	11 „ „	coefieientul	coeficientul
272	5 „ „	presența	prezența
276	13 „ „	Inălcare	care
276	9 „ „	țimea	Inălțimea
280	12 „ „	însemnări	însumări
281	5 „ sus	însamnări	însumării
287	4 „ jos	perde	pierde
288	13 „ „	A trebuit	Ar trebui
288	12 „ „	suprimă.	suprimăm.
290	10 „ sus	porporționale	proporționale
290	7 „ jos	sau de $T_0 - T$	,
292	14 „ „	*Compoziția*	*Compoziția*
293	17 „ „	hârte	hărți
296	2 „ sus	stratosferei	atmosferei
297	15 „ jos	în o stratificație	în stratificație
304	13 „ sus	stabilit-	stabili-
304	14 „ „	atea	tatea
305	12 „ „	mai mare, de	mai mare de
306	1 „ jos	admosfera	atmosfera
311	19 „ „	solulu,	solului,
314	17 „ sus	*depresiuni*	*depresiune*
319	4 „ jos	arata	arătată
320	20 „ sus	nsumând	însemnând
321	2 „ „	pla	planul
321	3 „ „	țâșn	țâșni
322	9 „ jos	presiunea	presiunea *)
323	13 „ sus	a stânga	la stânga
323	11 „ jos	lich dului	lichidului
324	16 „ „	în h_1	în h'
325	1 „ „	$\mathfrak{C}_2 = -\overline{\omega}\,\omega \int_0^l$	$\mathfrak{C}_2 = -\overline{\omega}\,\omega \int_0^l (h+x)\,dx - p_0\,\omega\,l.$
328	4 „ „	n ce mod	în ce mod
331	18 „ sus	la vâr	la vârf
331	7 „ jos	suprapesiunea	suprapresiunea
332	11 „ sus	ralativă	relativa
335	4 „ jos	mișcărie	mișcării
337	15 „ „	ar	iar
345	2 „ „	balonul	balonul simplu

*) Presiunea scăzută = presiunea fictivă pe concavitatea calotei, exprimată prin primii doi termeni.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
346	18 „ sus	$v \leqslant V$	$v_0 \leqslant V$
346	11 „ jos	ruptură	ruptura
348	13 „ sus	*Navigaţia*	c) *Navigaţia*
348	11 „ jos	c)	d)

351 se însoţeşte figura 212 cu următoarea legendă:

1. Îmbrăcăminte.
2. Reţea.
3. „Labă de gâscă".
4. Coardă de evacuare.
5. Supapă.
6. Deschiderea îmbrăcămintei.
7. Apendice.
8. Suspensia nacelei.
9. Nacela.
10. Saci cu lest.
11. Guiderope
12. Funie de înălţare.
13. Cooardă de fixare.
14. Cămin pentru gaz.
15. Inele de rigiditate.
16. Lantrnă.
17. Forma balonului la umplere pe jumătate.
18. Supapă de siguranţă.
19. Coardă pentru deschiderea îmbrăcămintei.
20. Coardă pentru manevrarea supapei.

356	10 de jos	greu aţii	greutăţii
357	5 „ „	eu	cu
360	14 „ sus	gazu	gazul
361	15 „ „	orizontal la	orizontal
362	4 „ „	prin,	prin
364	13 „ sus	cunoşiinţă	cunoştinţă
367	16 „ „	*tluides*	*fluides*
371	10 „ „	elasticităţei	electricităţei

374 După rândul 12 se va intercala:

Intre timp a apărut o nouă clasă de turbine rapide, *turbinele elicoidale*, având elice drept rotor, cu tipul cel mai perfecţionat *Kaplan* (propulsorul fiind reglabil pentru ameliorarea randamentului la debite reduse). Turbina *Kaplan* are nu numai o mare importanţă economică, dar şi din punct de vedere ştiinţific a dat ocazia a se aplica paletelor metodele propuse de *Prandtl* pentru construcţia aripilor de avion.

Prin lucrările lui *Bjerkness* şi *Lechner* s'au verificat, între aripile purtante, paletele de turbine şi vârtejuri, vechile analogii dintre Hidrodinamică şi Electrotechnică,

In fine mai menţionăm turbina *Banki* (1917), o perfecţionare a roţii *Poncelet*, la care s'a separat eşirea de intrarea apei.

374	19 de sus	govedit	dovedit
377	11 „ „	*Prandl*	*Prandtl*
378	18 „ „	stătătoarea	stătătoare
381	1 „ jos	profilu	profilul
382	18 „ sus	*mulfiforme,*	*multiforme*
383	17 „ „	sustentaţii	sustentaţie
383	4 „ jos	*Jukowki*	*Jukowski*
384	7 „ sus	*Flüssigkeitsbervegungen*	*Flüssigkeitsbewegungen*
384	1 „ jos	2.419—411	2.419—441

PARTEA INTRODUCTIVĂ.

CAP. I.

OBIECT, DEFINIȚIUNI, PROPRIETĂȚILE FLUIDELOR.

1. — Obiectul Hidraulicei.

Hidraulica cuprinde mecanica fluidelor și diversele ei aplicațiuni, având ca bază studiul condițiunilor de echilibru și de mișcare a fluidelor.

Prin *fluide* se înțeleg atât lichidele cât și gazele. Din cele trei grupe, în cari se clasifică obișnuit corpurile după prima lor înfățișare, numai solidele prezintă o formă definită proprie. Gazele și lichidele (cu excepția suprafeței libere a acestor din urmă) primesc forma vaselor ce le conțin. Denumirea lor comună de fluide face aluzie la faptul, că moleculele lor sunt foarte mobile unele față de altele.

Hidraulica se împarte în general în două părți: *Hidrostatica* și *Hidrodinamica*.

Capitole importante ale Hidrostaticei au ca obiect: calculul presiunilor hidraulice statice, calculul eforturilor în pereți subțiri de rezervoare conținând fluide, stabilitatea corpurilor plutitoare, statica gazelor, etc.; iar ale Hidrodinamicei: calculul debitului fluid prin orificii sau al debitului de apă prin deversoare, studiul curenților, acela al scurgerii apei prin conducte forțate și canale, calculul rețelelor de conducte de distribuție și canalizare și acela al canalelor utilizate la navigație, studiul scurgerii apei subterane, acela al transportului de forță motrice prin apă, diferite alte probleme speciale, ca: studiul cinematic și dinamic al mișcării unui corp solid într'un mediu fluid, teoria undelor, teoria loviturilor de berbec, etc.

Aplicațiunile industriale ale Hidraulicei, precum: mașinile hidraulice, studiul și rectificarea cursurilor de apă, amenajarea căderilor de apă, aeronautica, etc., formează cursuri aparte.

In urma desvoltării teoretice deosebite, pe care mecanica fluidelor a luat-o în timpurile moderne, grație colaborării dintre fizicieni și matematicieni, numele de *Hidrodinamică* a fost consacrat teoriei pure a cinematicei și dinamicei fluidelor, rezervându-se acela de *Hidraulică aplicată*, sau simplu *Hidraulică*, Hidrostaticei și aplicațiunilor practice ale Hidrodinamicei.

După cum teoria elasticității, cu adoptarea unor ipoteze potrivite, formează baza Rezistenței Materialelor, care este o știință de aplicație, tot astfel, în urma introducerii unor anumite ipoteze simplificatoare în Hidrodinamica teoretică, pe această se întemeiază studiul Hidraulicei aplicate.

Rezultatele acestui studiu, completate și corectate cu ajutorul unor coeficienți, stabiliți prin observațiuni precise în natură și în laboratoare, sunt astfel folosite cu succes în aplicațiunile Hidraulicei.

Este adevărat că o parte din aceste rezultate se pot obține și prin o teorie mai elementară, făcându-se în schimb un apel mai larg la experiențe. Analiza matematică totuși, întrebuințată cu îndemânare la interpretarea fenomenelor sau experiențelor făcute în laboratoare de Hidro- și Aerodinamică, a adus mari servicii atât științei pure cât și aplicațiunilor practice. Ea a contribuit, în ultimele decenii, să se realizeze progrese considerabile în desvoltarea nouilor teorii, utilizate cu folos în technica turbinelor și aeroplanelor, în problema propulsiunii, a rezistenței fluidelor, etc.

2. — Caracterele principale ale corpurilor din punct de vedere mecanic.

Solidele, la aceeași temperatură, nu-și modifică sensibil forma, decât dacă li se aplică forțe ce întrec o anumită limită. Solide *absolut rigide*, cari să prezinte o rezistență infinită la deformațiuni, nu există în natură.

Rigiditatea provine din eforturile mutuale între molecule, eforturi cari, la un solid, se opun atât la depărtarea (proprietate numită *coeziune*) cât și la apropierea moleculelor.

Un solid, deformat sub acțiunea unor forțe (tracțiune, compresiune, încovoiere, torsiune, etc), ce nu întrec anumite limite, dacă, după suprimarea acestora, revine exact la starea lui de mai înainte, se numește *perfect elastic*; dacă, din contră, rămâne complet în starea deformată, el se numește *perfect plastic*.

Ambele aceste categorii de corpuri sunt ficțiuni, fiindcă în natură nu există decât corpuri intermediare, adică mai mult sau mai puțin elastice, mai mult sau mai puțin plastice.

Lichidele, fără a se opune la orice deformare, sunt foarte greu compresibile, adică, pentru a-și micșora cât de puțin volumul sub temperatură constantă, trebuesc supuse la compresiuni considerabile. Aceasta se datorește eforturilor moleculare desvoltate (compresiuni), cari se opun foarte mult la apropierea moleculelor. Din contră, neavând o coeziune sensibilă, la o tendință de despărțire a moleculelor, eforturile moleculare antagoniste (tracțiuni) nu opun decât o rezistență foarte mică ; cu alte cuvinte, dacă considerăm într'un lichid două particule în contact, despărțirea lor se produce îndată ce forțele exterioare ar întrece oarecari limite foarte mici, cari practic se pot socoti nule.

Așa dar, la lichide coeziunea fiind neglijabilă, în practică se admite că eforturile interioare nu pot fi decât *compresiuni*.

Din cauza aceasta și a lipsei concomitente de eforturi tangențiale, rezistența lichidelor la o deformațiune, ce nu atrage o reducere de volum, este nulă, ele ascultând nesilit de acțiunea gravității, pentru a lua cu mare ușurință forma vaselor ce le conțin.

Lichidele comprimate revin exact la volumul lor primitiv, îndată ce a încetat comprimarea, comportându-se din acest punct de vedere (volumetric), ca niște corpuri perfect elastice.

Gazele sunt de asemenea lipsite de coeziune, în sânul lor desvoltându-se numai eforturi de compresiune ; ele diferă însă de lichide, prin caracterele lor de a fi pe de o parte *ușor compresibile* iar pe de altă parte *dela sine dilatabile*. Gazele, neavând nici formă, nici volum determinat, umplu în întregime vasele închise ce le conțin. Cum, în aceleași condițiuni de presiune și temperatură, gazele prezintă același volum, dacă, după o comprimare sau o destindere, se revine la condițiunile inițiale de presiune și temperatură, ele recapătă exact volumul anterior, comportându-se din punct de vedere volumetric, atât la comprimare cât și la destindere, ca niște corpuri perfect elastice. Acestei proprietăți, manifestată în ambele sensuri (comprimare și destindere), i se datorește cealaltă denumire a lor de *fluide elastice*.

Imposibilitatea de a desvolta eforturi de tracțiune, care la lichide nu este decât aproximativă, la gaze este absolută, deoarece eforturile interne nu opun nici o rezistență la depărtarea moleculelor; aceasta se produce, din contră, dela sine, la cea mai mică cedare a forțelor exterioare de comprimare, cari limitează volumul fluidului.

In cazul unei lipse complete de coeziune, ceeace nu se întâlnește însă riguros la nici un corp natural, nu numai depărtarea, dar nici lunecarea a două particule, una față de alta, nu întâmpină, vreo rezistență.

Rezultă că fluidele și gazele prezintă două caractere comune: *1) de a nu putea avea în sânul lor decât eforturi de compresiune*; *2) de a nu prezenta eforturi tangențiale sensibile*, proprietate, care la fluidele naturale se manifestă cu atât mai pronunțat, cu, cât ne apropiem mai mult de starea de repaos, în care eforturile tangențiale sunt riguros nule; în această stare, o forță cât de mică poate să facă să alunece două particule în contact una față de alta, ori cât de mare ar fi presiunea exercitată de una contra alteia.

Aceste două caractere, înrudite, întru cât ambele sunt datorite lipsei de coeziune, constitue *fluiditatea*, proprietate exprimată prin denumirea de *fluide*.

Drept consecință a acestei proprietăți, într'un fluid în repaos absolut sau relativ, *neexistând eforturi tangențiale, presiunile interioare sunt nomale pe elementele de suprafață plane, pe cari se exercită.*

Să considerăm de exemplu un corp fluid (Fig 1), despărțit printr'un plan fictiv în două părți, (*A*) și (*B*). In studiul mecanic al părții (*B*) putem suprima partea (*A*), cu condiția de a introduce asupra diferitelor elemente de suprafață $d\Omega$ ale planului, forțe exterioare egale cu eforturile $fd\Omega$, pe cari partea (*B*) le exercită asupra părții (*A*), f fiind efortul pe unitatea de suprafață.

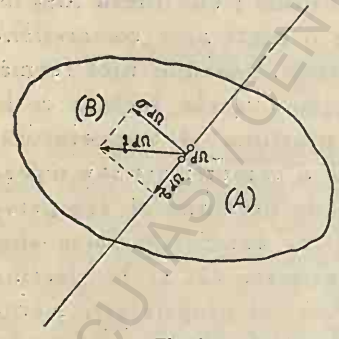


Fig. 1

Primul caracter menționat constă în aceea că eforturile elastice mutuale $fd\Omega$, exercitate de (*A*) asupra lui (*B*), sunt îndreptate spre interiorul lui (*B*) și vice-versa; al doilea caracter constă în aceea că, componenta tangențială sau transversală $\tau d\Omega$ este în general foarte mică, fiind riguros nulă în cazul repaosului. Eforturile se reduc astfel la componentele normale $\sigma d\Omega$ cu $\sigma = p$ (presiunea unitară).

Așa dar, se poate da fluidelor următoarea definiție mecanică, referitor la modul cum ele se comportă la o tendință de deformațiune: *fluid este un corp care, în repaos, sub temperatură constantă, nu opune nici o rezistență, la orice deformațiune ce nu atrage o reducere de volum.*

Corpul definit astfel posedă într'adevăr caracterele menționate

nate, deoarece, considerând în interiorul său un plan, despărţirea corpului după acest plan sau alunecarea după el a uneia din părţi pe cealaltă, sunt deformaţiuni fără reducere de volum şi nici una din aceste operaţiuni nu va întâmpina, prin definiţiune, vreo rezistenţă; corpul nu va putea desvolta deci, nici eforturi de tracţiune, nici eforturi transversale sau de alunecare.

Despre *elasticitatea* fluidelor vom vorbi cu ocazia descrierii acelora, cari ne interesează mai mult; *apa* şi *aerul*.

Această proprietate îşi găseşte expresia analitică în aşa numita *ecuaţie fizică* a fluidului.

3. — Viscozitate.

Vom considera aici numai mişcări cu deformaţiuni *relativ lente* ale elementelor de volum, adică cari se petrec în aşa numitul *regim liniştit*. Despre *regimul turbulent*, care se stabileşte la mişcări cu deformaţiuni *relativ rapide*, se va vorbi în Hidrodinamică, unde se vor preciza aceste noţiuni.

S'a spus că, moleculele unui fluid, cu mare uşurinţă lunecă unele faţă de altele la o solicitare tangenţială cât de mică, sau se pot despărţi una de alta. Asemenea deformaţii, în condiţiuni identice de solicitare, se produc la unele *fluide naturale* mai repede, la altele mai încet, dând la iveală o oarecare *rezistenţă la mişcare*, de natură neelastică, numită *viscozitate* şi care apare numai la mişcare. Un fluid lipsit complet de viscozitate — ceea ce este o ficţiune — se numeşte *fluid perfect*.

Viscozitatea, proprietate ce se manifestă în deobşte prin desvoltarea unui efort transversal τ_v, implică şi existenţa unei componente normale, adică a unui efort normal de viscozitate σ_v, deoarece condiţiile echilibrului*) arată că eforturile transversale nu pot exista singure. Intr'adevăr, se demonstrează în teoria elasticităţii că, într'un punct al unui mediu continuu, 1) dacă componentele normale ale eforturilor după trei direcţiuni diferite, de exemplu ale muchiilor unui triedru de referinţă, sunt egale şi de aceiaşi natură — tracţiuni sau compresiuni —, ele sunt egale în toate direcţiile, iar eforturile tangenţiale lipsesc; vice-versa, 2) dacă există eforturi transversale, cum se întâmplă la materia solidă deformată eforturile normale pe faţete diferit orientate diferă între ele, neputând fi deci toate nule. Ori, aceleaşi legi statice se aplică şi eforturilor de viscozitate, când se exercită singure, sau eforturilor rezultante, când cele de viscositate se exercită concomitent cu cele elastice.

*) Cari se aplică şi în cazul mişcărei unei particule cu volum descrescând la zero.

In primul caz intră, așa dar, orice fluid neviscos, chiar dacă este în mișcare, precum și orice fluid natural în repaos; în al doilea caz intră orice fluid viscos în mișcare, putându-se admite că stării elastice a fluidului, considerat ca perfect — neviscos —, i se suprapune starea de viscozitate. Intr'un punct oarecare, eforturile normale totale, rezultate prin această suprapunere, vor diferi după orientarea elementului de suprafață, pe care se exercită.

La o problemă de *deformație plană*, — adică în cazuri când există identitate de condițiuni în orice plan, paralel cu un plan dat, numit *director* —, această variație, pe fețete perpendiculare pe *planul directior*, impusă de condițiile de echilibru, se ilustrează prin cercul lui *Ocagne-Mohr* (Fig. 2). Acesta, cu ajutorul unui pol P, dă, într'un punct, eforturile unitare normale σ și tangențiale τ, pentru orice orientare α a fețetei, atunci când se cunosc cele două eforturi principale: efortul normal maximum σ_{max} și efortul normal minimum σ_{min} (pentru care $\alpha=0$), ce se exercită pe fețete și în direcțiuni ortogonale și a căror diferență este egală cu $2\tau_{max}$. Dacă $\tau_{max}=0$, cum e cazul fluidelor perfecte, toate eforturile σ rezultă că sunt egale între ele. Dacă $\tau_{max}\neq 0$, ca în cazul viscosității, oricare ar fi poziția polului P, eforturile σ într'un punct nu vor putea fi toate nule.

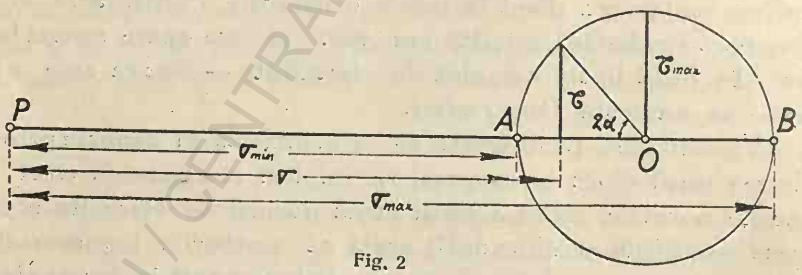


Fig. 2

Dacă, pe de o parte, starea elastică într'un punct al fluidului, presupus perfect, este reprezentată printr'un cerc nul în O și cu polul P ca în figură, PO va figura presiunea univalentă în acel punct; pe de altă parte starea de viscozitate va fi reprezentată prin cercul de diametru AB și polul în O, fiindcă eforturile normale de viscozitate trebue să se anuleze odată cu cele transversale.

Acest cerc și polul P vor reprezenta atunci starea suprapusă, adică aceea a unui fluid natural în *deformație plană* *).

*) S'a considerat aci presiunile ca pozitive și tensiunile ca negative. In ceea ce urmează însă, urmând a se stabili relațiile între eforturi și deformațiuni vom considera contrariul, adică tensiunile ca positive la fel ca dilatațiile liniare, după cum se uzitează în mecanica rațională.

Așa dar, viscozitatea, care dă la iveală un efort tangențial τ_v, introduce cu necesitate și o componentă normală τ_v, variabilă în același punct după orientarea fațetei, și care se compune, după cum s'a spus, cu efortul normal elastic σ_e, ce în absența viscozității există singur, fiind independent de orientarea fațetei, deoarece la fluide τ_e este totdeauna nul. Dacă deformația nu este *plană*, lucrurile se petrec analog după trei planuri de referință ortogonale.

Viscozitatea, manifestându-se numai la mișcare, este o funcție de *vitesele de deformație*. In particular τ, efortul de viscozitate ce se desvoltă, ca acțiune și reacțiune, de ambele părți ale unei fațete, *după care considerăm lunecarea produsă*, este proporțional cu variația vitesei paralele cu fațeta, variație luată pe unitatea de distanță sau de grosime de strat, în sens normal fațetei, în punctul considerat. Această variație de vitesă, raportată la distanța normală — *gradient* de vitesă —, se numește *vitesă de lunecare*, iar legea enunțată este *legea lui Newton*.

Pentru a ne da seamă de modul cum se produc deformațiunile, *independent de timp*, să ne închipuim un paralelipiped drept elementar, d.e. un cub (Fig. 3), deformându-se după un plan xy paralel cu două din fațetele cubului (deformație plană având xy ca plan director).

Pătratul $OABC$, în care se proectează cubul, după o deformație infinitizimală va deveni paralelogramul $OA'B'C'$, în ipoteza că muchea O nu s'a mișcat, sau a revenit prin translație în poziția inițială.

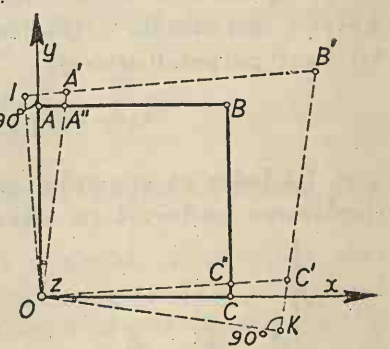


Fig. 3

Vom avea o deformație (micșorare) unghiulară $\sphericalangle AOA' + C'OC$, a unghiului drept $\sphericalangle AOC$. Mărimea ei va fi

$$\frac{AA''}{OA} + \frac{CC''}{OC}.$$

Cantitatea, cu care fațeta $A'B'$ a lunecat față de fațetă opusă, este evident IA'; iar raportată la unitatea de distanță dintre fațete va fi

$$\frac{IA'}{OI} \text{ sau } \sphericalangle IOA' = IOA + AOA' = AOA' + C'OC,$$

adică egală cu deformația unghiulară, arătată mai sus. Același lucru vom găsi, căutând să evaluăm lunecarea fațetei $C'B'$ față de OA', adică KC', raportată de asemenea la unitatea de distanță dintre fațete-

Vitesa de lunecare (sau *de deformaţie unghiulară*), este, la limită, cantitatea în chestiune împărţită cu timpul Δt în care ea s'a produs.

Această vitesă diferă după orientarea perechei de faţete paralele, considerată în fluid, fiind aceeaşi, după cum rezultă din cele de mai sus, pe feţete respectiv dreptunghiulare, (ceeace este evident şi prin aceea că expresia revine la deformaţia unghiului diedru drept format de ele) d. e. xOz sau yOz, la alegerea făcută a axelor de referinţă Ox, Oy în planul director (perpendicular pe Oz) al deformaţiunii masei, în care am considerat cubul elementar cu faţetele paralele cu triedrul de referinţă.

Legea lui *Newton* fiind o lege de proporţionalitate între deformaţia de lunecare sau cea unghiulară în unitatea de timp şi efortul transversal de viscozitate τ, acesta are o expresie analitică monomă, în cazul când şi deformaţia se exprimă cu un singur termen; d.e. în cazul figurei 3, pentru efortul exercitat în direcţia Ox, perpendicular pe direcţia Oy sau vice-versa,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = lim\ \mu \frac{IA'/OI}{\Delta t},$$

unde μ este coeficientul de proporţionalitate caracteristic fluidului, numit *coeficient de viscozitate*. Expresia analitică a deformaţiei unghiulare în unitatea de timp comportă în general doi termeni. In cazul figurei vom avea, adoptând pentru eforturile transversale o notaţie mai simplă τ_z (indicele arătând axa pe care atât τ_{xy} cât şi τ_{xy} sunt perpendiculare):

$$\tau_z = lim\ \mu \left(\frac{AA''/OA}{\Delta t} + \frac{CC''/OC}{\Delta t} \right).$$

Să luăm ca exemplu cazul unei mişcări plane, produsă de, deplasarea uniformă cu vitesa V a unei plăci AB în planul său

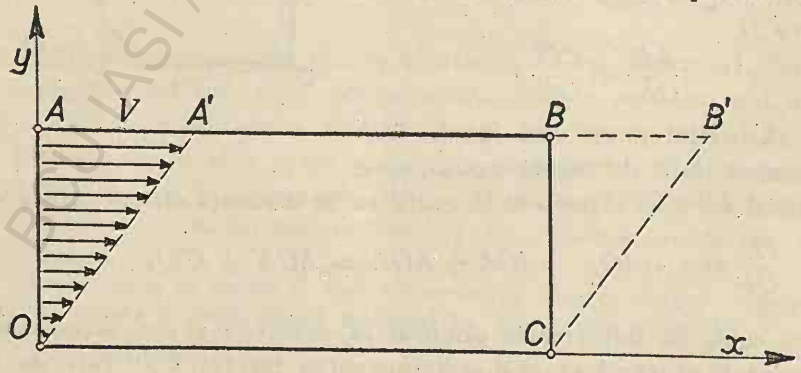


Fig. 4

paralel cu o altă placă OC fixă (Fig. 4), asupra unui fluid viscos

aflători între plăci, la cari aderă straturile de fluid în contact, şi să alegem axa xz în planul fix, Ox fiind în sensul mişcării. Repartiţia vitesei după o normală la plăci, luată drept axa Oy — axa Ox fiind paralelă cu vitesa plăcii mobile şi cu vitesele tuturor moleculelor —, are înfăţişarea din (Fig. 4), putând fi socotită liniară dacă OA este destul de mic. Fie v_x vitesa într'un punct oarecare al normalei OA; după legea generală a lui *Newton* vom avea, în faţetele unui paralelipiped elementar, paralele cu plăcile, forma analitică simplă cu un singur termen

$$\tau = \frac{V}{OA} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

celălalt termen fiind nul.

Derivata parţială $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ reprezintă vitesa unghiulară de deformaţie sau micşorarea unghiului drept AOC în unitatea de timp.

Dacă planul xOz, paralel cu care se iau cele două faţete $dx\,dz$ ale paralelipipedului elementar, n'ar mai reprezenta un plan paralel cu plăcile figurei 4 — neputându-se deci conchide că acele faţete îşi păstrează orientarea în timpul deformaţiei — ci un plan oarecare trecând prin Oz, faţeta $dx\,dz$, în timpul deformaţiei, se va roti în general în jurul lui dz (sau Oz din Fig. 3), iar expresia analitică a lui τ, atât în faţeta $dx\,dz$ cât şi în faţeta perpendiculară ei $dy\,dz$, va avea doi termeni şi anume

$$\tau_z = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

paranteza exprimând vitesa de micşorare a unghiului diedru yOx cu muchea Oz din Fig. 3.

Cum o mişcare de ansamblu nu schimbă deformaţiile, cari sunt mişcări relative, putem reduce cazul general al Fig. 3 la cazul particular al Fig. 4, în care OC' este constrâns a rămâne pe Ox, dacă am da cubului $OABC$ în timpul deformaţiunii o rotaţie cu unghiul $C'OC = IOA$ în sensul acelor ceasornicului. In cazul acesta I ar cădea pe Oy şi C' pe Ox, rezultând forma monomă a legii lui *Newton*, dar vitesele v_x ar fi atunci vitese relative faţă de axe mobile ce s'ar roti în timpul deformaţiei cu unghiul $C'OC$.

Să studiem acum natura deformaţiilor plane (după planul xy) la cubul elementar considerat, în diferitele faţete ce trec prin muchea Oz sau paralela ei prin centrul D. Comprimând cu-

bul pe o direcţie diagonală, d.e. AC (Fig. 5), se vede uşor că, după ambele faţete rectangulare AC şi OB, lunecarea şi deci deformaţia unghiului drept format de ele este nulă — *planurile principale de deformaţie* — pe când lunecarea maximă se produce după planurile bisectoare, adică la 45° *). Rezultă că şi efortul τ va fi respectiv nul sau maxim, pe când σ în primele două faţete va fi maxim sau minim — de fapt compresiunea maximă —, iar în ultimele două faţete la 45° va avea valoarea mijlocie, adică nulă. Din cauza simetriei vom avea în acest caz particular

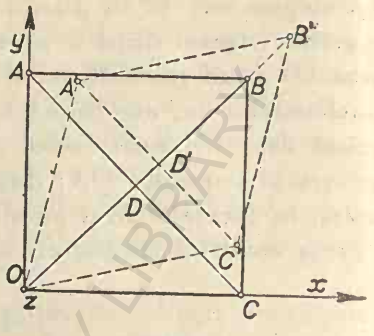


Fig. 5

$$\tau_{max} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Considerând echilibrul prismei OAC (Fig. 6), pe ale cărei faţete se exercită numai eforturile marcate prin săgeţi, rezultă uşor (compară şi cercul lui *Mohr*) după Fig. 6

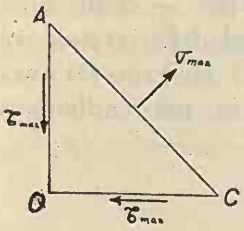


Fig. 6

$$\sigma_{max} = \tau_{max} = lim\, 2\mu \frac{AA'/AB}{\Delta t} = lim\, 2\mu \frac{CC'/CB}{\Delta t}$$

$$= lim\, 2\mu \frac{DD'/DB}{\Delta t} = lim\, 2\mu \frac{BB'/OB}{\Delta t},$$

ultimele două derivate, fără factorul 2μ, reprezentând deformaţii *liniare* în unitatea de timp sau vitesa de deformaţie liniară după direcţia OB.

Se arată **) că nu numai după direcţiile lui σ_{max} şi σ_{min}, cari corespund planurilor principale ale deformaţiunii OB şi AC, dar şi în orice altă direcţie Ox sau Oy, avem expresiile:

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad \sigma_y = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y},$$

de oare ce atât σ (vezi cercul lui *Mohr*) cât şi deformaţiile liniare în unitatea de timp, în diferitele direcţiuni în jurul unui punct, urmează aceeaşi lege sinusoidală.

*) Vezi cercul lui *Mohr* cu polul în O, unde ordonatele τ pot reprezenta pe o scară oarecare deformaţiile unghiulare în unitatea de timp, cu cari τ este proporţional.

**) Vezi *Buletinul Politehnicei* Nr. 1 şi 2 din 1941.

Dacă deformaţia, în loc de a fi plană este oricum, generalizarea expresiilor de mai sus se face prin permutări circulare, o deformaţie oarecare putând fi socotită ca suprapunerea a trei deformaţii plane după un triedru de referinţă *).

Efortul tangenţial sau transversal τ_v, fiind o *rezistenţă la lunecare în timpul mişcării de deformaţie*, este uneori comparat cu frecarea dintre solide. Există totuşi deosebiri. Pentru învingerea acestei din urmă frecări se cere acţiunea unei forţe exterioare tangenţiale, care să întreacă o anumită limită, şi atunci se produce o vitesă relativă între suprafeţele de contact. La un fluid, din contră, *cea mai mică forţă tangenţială* acţionând un anumit timp — variabil după natura fluidului —, poate produce o anumită deformaţie de lunecare între particulele aşezate de ambele feţe ale unui plan. Acesta în general nu este o *suprafaţă de discontinuitate*, ca în cazul suprafeţei de frecare între solide. In acest din urmă caz, de o parte şi de alta a suprafeţei de contact există un salt de vitesă — tocmai vitesa relativă, — şi de aceea avem aci $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \infty$.

O altă diferenţă esenţială între frecarea dintre solide şi efortul τ_v de viscozitate — care efort, odată cu τ_e elastic, se întâlneşte şi în sânul solidelor, în timpul deformaţiei, — este următoarea: frecarea este independentă de vitesa de lunecare şi de aria suprafeţelor pe cari se produce, ea depinzând numai de presiunea totală ce se exercită normal pe acestea; forţa tangenţială totală a viscozităţii este, din contră, proporţională cu aria suprafeţei în care se exercită şi independentă de presiune, iar efortul unitar respectiv este proporţional cu vitesa deformaţiei de lunecare, în sensul arătat mai sus.

Viscozitatea fluidelor este în general foarte mică; la lichide ea scade când temperatura creşte, la aer se întâmplă contrariul.

Lichidele naturale sunt toate viscoase, unele mai mult — smoala, răşina, păcura, — altele mai puţin (alcoolul, eterul, etc.)

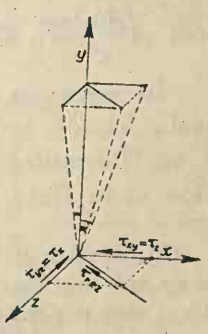


Fig. 7

*) De altfel, în acest caz general, se vede uşor că există într'un punct trei eforturi σ după cele trei axe şi 6 eforturi τ. Ultimele, două câte două egale, dreptunghiulare şi simetrice, se compun în fiecare plan coordonat pentru a da pe τ rezultant respectiv. Se mai vede grafic (Fig. 7) că direcţia rezultantei τ din faţeta xz împreună cu muchea y definesc o faţetă, a cărei vitesă de lunecare rezultă din vitesele de lunecare din faţetele xy şi zy tot prin adunare geometrică, după cum τ rezultă din τ_x şi τ_z, în faţeta xz, aşa cum cere proporţionalitatea dintre vitesele de alunecare şi eforturi.

Din cauza viscozităţii, temperatura creşte în timpul deformării, ceeace arată că lucrul intern al viscozităţii se transformă în căldură, el fiind luat din lucrul forţelor exterioare. ce produc deformarea.

Introducerea în teorie a noţiunii de fluid parfect — neviscos, adică cu τ_ν şi σ_ν riguros nule — simplifică calculele. Un asemenea fluid nu opune nici o rezistenţă — lucrul intern fiind nul — şi deci nu reclamă nici un lucru exterior la orice schimbare de formă, lentă sau rapidă, bine înţeles sub volum şi temperatură constante.

Din punct de vedere al absenţei unui lucru intern la o asemenea deformaţie, fluidele perfecte sub temperatură şi volum constante se pot asemăna cu solidele perfect elastice, cari, după suprimarea treptată a forţelor exterioare, astfel ca să se restitue lucrul exterior absorbit la deformaţie, revin la forma lor iniţială. Ele prezintă analogie şi cu solidele absolut rigide, la cari însă lipsa de lucru intern se datoreşte lipsei de deformaţiune. Atât viscozitatea fluidelor, cât şi lipsa de elasticitate perfectă la solidele nerigide, sunt cauze de pierdere de energie sub formă de lucru intern, care în timpul deformaţiei este transformat în căldură.

In Hidraulică nu se studiază decât fluidele *isotrope*, adică cari au aceleaşi proprietăţi fizice în toate direcţiile. Fluidele cari interesează mai mult sunt: dintre lichide, *apa*; dintre fluidele elastice, *aerul*.

4. — Apa.

Cele mai multe aplicaţiuni ale *Hidraulicei* se referă la apa în stare lichidă, şi de aci derivă şi numele acestei ştiinţe şi a subdiviziunilor ei.*)

Greutatea specifică ϖ a apei, la presiunea atmosferică şi la 4^0 C, este de $1000\ kg/m^3$ sau $1\ kg/dm^3$ sau $0{,}001\ kg/cm^3$. Densitatea ei $\frac{\varpi}{g} = \rho$ este aproximativ de $100\ kg\ sec^2/m^4$.

In mecanica solidelor corpurile se consideră mai întâiu ca absolut rigide, iar studiul elasticităţii se face mai târziu. Tot astfel, în Hidraulică, apa nu se consideră cu toate proprietăţile ei fizice, ci ca fluid ideal, care are proprietăţile esenţiale ale apei,

*) ὕδραυλος din ὕδωρ = apă şi αὐλὸς = orgă, deci orgă funcţionând cu curent de apă, una din primele aplicaţii ale Hidraulicei, la conducerea jocurilor de orgă, şi care şi-a împrumutat numele ştiinţei Hidraulicei.

dar la care se neglijează proprietăţile ei fizice secundare, d.e. viscozitatea, elasticitatea, etc.

Totuşi, atunci când influenţa unora din aceste proprietăţi nu se poate neglija, studiul se completează, ţinând seamă şi de ele.

Să amintim câteva proprietăţi secundare, atât pentru interesul pe care-l prezintă în anumite cazuri, cât şi pentru a vedea în ce măsură ele se pot neglija.

a) *Viscozitate.*

După experienţele lui *Poiseuille*, valoarea pentru apă a coeficientului de viscozitate, definit prin legea lui *Newton*, arătată mai sus, este, în funcţie de temperatură, în sistemul de unităţi *kg*, *m*, *sec* (formula de dimensii fiind $FL^{-2}T$),

$$\mu = \frac{0{,}0001817}{1 + 0{,}337\,\theta + 0{,}00022\,\theta^2} \; kg\,sec/m^2$$

iar

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \mu\,\frac{9{,}81}{1000} = \frac{0.00000178}{1 + 0{,}0337\,\theta + 0{,}00022\,\theta^2} \; m^2/sec,$$

sau în C. G. S.

$$\nu = \frac{0{,}0178}{1 + 0{,}0337\,\theta + 0{,}00022\,\theta^2} \; cm^2/sec,$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ fiind prin definiţie *coeficientul de viscozitate cinematică, având ca dimensii* (L^2T^{-1}).

După această formulă avem pentru apă:

la	0^0	$\nu = 0{,}0178$ cm^2/sec
„	10^0	$\nu = 0{,}0133$ „
„	20^0	$\nu = 0{,}0100$ „
„	50^0	$\nu = 0{,}0056$ „
„	100^0	$\nu = 0{,}0030$ „ .

Este interesant a se compara aceste cifre cu acele ale untdelemnului şi ale motorinei:

untdelemn	*la*	20^0	$\nu = 2{,}56$ cm^2/sec
	„	50^0	$\nu = 1{,}78$ „
motorină	„	20^0	$\nu = 3{,}82$ „
	„	50^0	$\nu = 0{,}60$ „
	„	100^0	$\nu = 0{,}10$ „ .

Viscozitatea se poate lăsa de o parte în unele probleme: d.e. la scurgerea prin orificii sau deversoare, fiindcă este negli-

jabilă ; la calculul impulsiunii unei mase fluide (d.e. pe paletele unei turbine), fiindcă acolo ea nu intervine de loc.

La scurgerea prin tuburi, canale și cursuri naturale, și în deosebi la mișcarea unui corp într'un mediu fluid, care opune o rezistență datorită tocmai viscozității, trebue evident ținut seamă de aceasta. In asemenea cazuri, în cari viscozitatea nu se poate neglija, deseori se face mai întâiu abstracție de ea pentru simplificarea calculelor, iar apoi în formule se introduc cuvenitele modificări sau corecțiuni. La scurgerea prin conducte sau canale, efectul viscozității se înglobează în acel al frecării cu pereții, a cărei expresie primește astfel o sporire fictivă în consecință.

b) *Elasticitate.*

Deși apa este în orice caz mai compresibilă ca solidele (de cca. *100* mai mult ca fierul), reducându-și apreciabil volumul sub o presiune foarte mare, totuși compresibilitatea aceasta se manifestă extrem de puțin la presiunile ce întâlnim în aplicațiunile curente ale Hiraulicei. Deaceia, în Hidraulică, apa este privită n general ca incompresibilă, în afară de fenomenele de propagare a sunetului sau a loviturilor de berbec, de transmisia sonică *) a energiei, etc, cazuri în cari *compresibilitatea* apei, sau proprietatea inversă, *elasticitatea*, joacă un rol important.

Reducerea volumetrică a apei (sau reducerea liniară proporțională a unei coloane de secțiune transversală constantă) sub o presiune egală cu *1 atmosferă* (*1,033 kg/cm²*) atinge *49,17 milionimi* ($\cong 50.10^{-6}$) din volumul în vid, sau *48,6* din volumul sub o presiune de *1 kg/cm²*. Raportul dintre reducerea proporțională a volumului către creșterea presiunii unitare, care o provoacă, ia numele de *coeficient de compresibilitate* și îl vom însemna cu $\varkappa$.

Evident că definiția nu se schimbă, dacă în locul reducerei de volum considerăm reducerea *liniară* proporțională a unei coloane de lichid comprimată într'un cilindru cu pereți infinit de rigizi.

La solide, inversul coeficientului de compresibilitate, analog ultimei definiții, în care caz însă se consideră reducerea sau augmentarea proporțională a lungimii unei bare *libere* (care diferă de variația proporțională a volumului său), constitue *modul de elasticitate* al materiei solide, din care e făcută bara, și se înseamnă cu *E*. Pentru apă vom însemna acest modul cu ε, deci

$$\varepsilon = \frac{1}{\varkappa}.$$

*) *Sonicitate*, ramură technică, creată de *Ing. Gogu Constantinescu.*

Cifra de mai sus a fost dedusă de *Colladon-Sturm* din relaţia vitesei sunetului, care este un fenomen de propagare.

Într'adevăr, cunoaştem din Fizică (şi se va demonstra şi aici într'un capitol al Hidrodinamicei, că vitesa c a propagărei undelor sonore într'un mediu de densitate ρ şi cu modulul de elasticitate ε (definit mai exact ca raportul dintre creşterea *infinitezimală* dp a presiunei unitare şi descreşterea proporţională corespunzătoare $\frac{dV}{V}$ a volumului*), este dată de formula

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho\varkappa}}.$$

Dar în sistemul practic (*kg*, *m*, *sec*), care ne va da pe $\varkappa$ la presiunea de $1 kg/m^2$, avem $\rho = 100$ (mai exact $\frac{1000}{9{,}81}$). Dacă luăm, pentru c în apă 1435 *m/sec*, rezultă aproximativ:

$$\varepsilon = 220.000.000 \ kg/m^2 = 22000 \ kg/cm^2$$

iar $$\varkappa = 0{,}0000476.10^{-4} \ m^2/kg = 0{,}0000476 \ cm^2/kg,$$

valoare foarte vecină de cifra dată mai sus.

Cifra exactă pentru presiuni până la $200 \ kg/cm^2$ este

$$\text{la } 0^0: \ \varkappa = 0{,}000052 \ cm/kg, \text{ iar}$$
$$\text{la } 20^0: \ \varkappa = 0{,}000049 \ cm^2/kg.$$

ε creşte uşor cu presiunea, dar în practică se poate considera independent.

Legea compresibilităţii se poate exprima prin formula

$$V = V_0[1 - \varkappa(p - p_0)]$$

sau

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}[1 - \varkappa(p - p_0)]$$

sau

$$\frac{1}{\varpi} = \frac{1}{\varpi_0}[1 - \varkappa(p - p_0)],$$

care constitue ecuaţia fizică a lichidului, dar care, pentru mici

---

*) Cum $\rho = \frac{1}{v}$, (v = volumul ocupat de unitatea de masă) sau $\rho v = 1$, diferenţiind logaritmii găsim: $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v}$. Cum prin definiţie $\varepsilon = -\frac{dp}{dv/v} = \frac{dp}{d\rho/\rho}$, rezultă: $\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{dp}{d\rho}$ (derivată ce se obţine din ecuaţia caracteristică $p = f(\rho)$ a mediului); ori, se demonstrează că $\frac{dp}{d\rho} = c^2$, deci $c^2 = \frac{\varepsilon}{\rho}$.

variaţiuni, adică sub formă diferenţială, se aplică la toate corpurile, după însăşi definiţia coeficientului de compresibilitate.

Într'o masă de apă în repaos, considerând echilibrul în sens vertical, al unei prisme infinitesimale de înălţime dz şi de secţiune 1, care pentru o axă z descendentă, cere ca

$$dp = \varpi\, dz \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\varpi} = \frac{dz}{dp},$$

obţinem legea de repartiţie a presiunii p după adâncimea z (fie $p=p_0$ pentru $z_0=0$): dacă în formula de mai sus introducem această valoare a lui $\frac{1}{\varpi}$ şi integrăm găsim

$$\varpi_0 z = p - p_0 - \frac{\varkappa}{2}(p - p_0)^2. \qquad (1)$$

Luând ca primă aproximaţie valoarea lui $p-p_0$ corespuzătoare lui $\varkappa=0$, adică

$$p - p_0 = \varpi_0 z, \qquad (2)$$

şi înlocuind această expresie în termenul din urmă din (1), obţinem, în a doua aproximaţie, relaţia

$$p - p_0 = \varpi_0 z\left(1 + \varkappa \frac{\varpi_0 z}{2}\right). \qquad (3)$$

Să luăm ca unităţi : *cm*, *kg*, *sec*, în care caz ϖ_0 pentru apa distilată este 0,001.

Pentru apa de mare, dacă $z_0=0$ este luat la nivelul mării, avem în aceleaşi unităţi $\varpi=0{,}001022$, astfel că la 8000 *m* adâncime vom găsi pentru presiune, cu cele două aproximaţiuni, respectiv

$$800000.0{,}001022 = 818 \ kg/cm^2 \qquad (2')$$

şi

$$818(1 + 409.0{,}00005) = 835 \ kg/cm^2. \qquad (3'),$$

c) In Hidraulică se neglijează în general, ca fiind foarte mici, *schimbările de volum* ale apei, *datorite unei schimbări de temperatură.*

După fizicianul *Roselli*, luând ca unitate volumul apei la 4°, volumul la presiunea atmosferică se exprimă în funcţie de temperatură prin

$$V_\theta = 1 + 0{,}00000837991(\theta - 4)^2 - 0{,}000000376702(\theta - 4)^{2,6} + 0{,}0000000224329(\theta - 4)^3.$$

După această formulă rezultă următoarele valori

la	-10^0	1,00186
„	0^0	1,00013
„	4^0	1,00000
„	40^0	1,00770.

Din cele arătate sub b) şi c) deducem că, în aplicaţiunile practice ale Hidraulicei, apa se poate considera ca având volum constant în toate împrejurările.

d) In Hidraulică se neglijează în general *forţele capilare* ale lichidelor, cari intervin sub forma *tensiunii superficiale*. Pentru interesul pe care îl prezintă însă acest fenomen, ne vom ocupa pe scurt mai departe şi de această proprietate secundară.

e) Apa are proprietatea de a *absorbi gaze*. Oxigenul şi azotul din aer sunt absorbite în mod fizic, corespunzător coeficientului de absorbţiune al fiecăruia din aceste gaze separat, adică volumului la 0^0 al acestor gaze, dizolvat în apă sub presiunea unei atmosfere (760 *mm* coloană de mercur), şi care este, după *Bunsen*, respectiv:

$$\alpha_O = 0{,}04115 - 0{,}00109\,\theta + 0{,}0000256\,\theta^2$$

$$\alpha_N = 0{,}020346 - 0{,}0005388\,\theta + 0{,}00001156\,\theta^2.$$

Coeficientul de absorbţie al aerului se deduce imediat, aplicând *legea amestecurilor*. Intr'adevăr, ştim că, în cazul unui mediu compus din mai multe gaze, dizolvarea se face proporţional cu presiunea ce fiecare din ele ar exercita-o, dacă ar ocupa singur acelaşi spaţiu. Urmează că, în cazul aerului, volumele de oxigen şi azot în soluţie vor fi proporţionale cu presiunile respective

$$p_O = 0{,}2096\ atm$$

$$p_N = 0{,}7904\ atm$$

(căci *1 vol. aer* = *0,2096 vol. O* + *0,7904 vol. N*).

Aşa dar, coeficientul de absorbţiune α_a al aerului la *760 mm* coloană de mercur va fi

$$\alpha_a = 0{,}2096\alpha_O + 0{,}7904\alpha_N$$

şi, luând pe α_O şi α_N la $\theta = 0^0$,

$$\alpha_a = 0{,}024726.$$

Rezultă că, din cauza puterii de absorbţiune mai mare a oxigenului, aerul în soluţiune apoasă conţine 34% oxigen şi 66% azot, în loc de 21% şi 79% cum e proporţia în aer liber.

Dacă, într'un curent de apă, particulele ce conţin aer dizolvat sosesc în locuri unde domneşte o presiune mai mică decât cea atmosferică, aerul se degaje, dând naştere la un amestec de apă şi aer. Acest amestec influenţează pe de o parte fenomenul scurgerii, iar pe de altă parte oxidează pereţii metalici, cu cari vine în contact, prin proporţia mare a oxigenului. Aceasta s'a observat la canalele turbinelor şi pompelor centrifuge.

f) Dacă apa, în curgerea ei, trece prin spaţii libere unde se găseşte aer, se desvoltă şi *vapori*, cari se amestecă cu aerul. Fenomenul acesta devine sensibil numai la temperaturile ridicate

sau dacă presiunea scade sub cea atmosferică, în care caz desvoltarea vaporilor se face simultan cu degajarea aerului.

Dacă p' este presiunea vaporilor, p presiunea amestecului, proporția aburului va fi p'/p și a aerului $(p—p')/p$, adică proporțional cu presiunile parțiale: în cazul unui amestec saturat, p' va fi presiunea aburului saturat.

Proprietățile fizice ale apei, descrise mai sus, nu vor fi luate în seamă la stabilirea formulelor generale, cari formează baza Hidraulicei.

g) Apa pură chimicește se soldifică sub presiunea atmosferică la 0^0, după însăși definiția temperaturei nule, pe când apa impură, d. e. cea de râu, la cca. $0{,}0017^0$, iar apa de mare la cca. $2{,}5^0$. In condițiuni speciale se poate coborî punctul de îngheț până la $—13^0$, solidificarea producându-se atunci brusc, cu ridicarea temperaturei la valoarea de îngheț. Punctul de topire al gheței se poate coborî prin creșterea presiunii, și anume cu $0^0{,}0075$ pentru fiecare atmosferă în plus.

In repaos apa îngheață dela suprafață în jos, formându-se o pojghiță, sub care temperatura variază dela 0^0 la 4^0. In apa curgătoare se formează și așa numita *ghiață de fund*, provenită din ghiața de suprafață sau din zăpada căzută.

La îngheț se desvoltă *79,25 calorii mari pe kg.* Capacitatea calorică (sau căldura specifică) a gheței solide este de *0,5 calorii*, iar a gheței topite de *1 calorie* ca și a apei.

Suprafețe de discontinuitate în apă.

Suprafața liberă, după care lichidul conținut într'un vas vine în genere în contact cu un gaz (obișnuit aerul), precum și suprafețele de separație între lichide diferite, cari nu se amestecă, depind de starea de repaos sau de mișcare a masei fluide. Asemenea suprafețe se numesc *suprafețe de discontinuitate cu privire la densitate*. Există însă și *suprafețe de discontinuitate cu privire la vitesă*, vitesele moleculelor de o parte și de alta prezentând un salt brusc dela o valoare la alta, din cari una poate fi nulă. Asemenea suprafețe pot lua naștere chiar în interiorul aceleiași mase fluide și anume în fenomene cu stări de mișcare diferite a di-

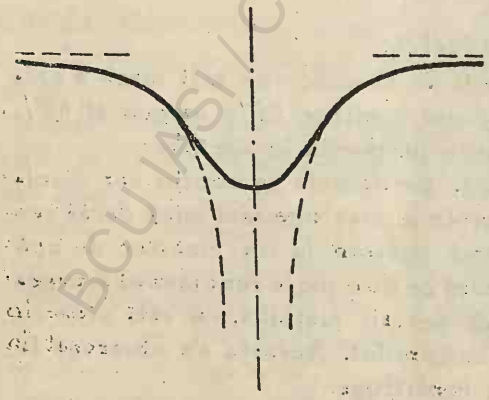


Fig. 8

verselor părți ale masei (vârtejuri, curenți secundari, etc.). Iată câteva exemple de ambele speţe (*Prásil*).

Dacă un vas cu apă se învârteşte în jurul unei axe verticale cu o vitesă uniformă, la stabilirea repaosului relativ al lichidului faţă de vas se constată că suprafaţa liberă este un paraboloid de rotaţie. Dacă vasul este oprit brusc, masa lichidă continuă a se învârti, paraboloidul central se racordează însă spre pereţi cu un fel de hiperboloid de rotaţie, formând *vârtejul combinat al lui Rankine* (Fig. 8).

Un exemplu de suprafaţă de discontinuitate în repartiţia vitesei este următorul.

Prin micul orificiu al unei pâlnii cu axa verticală, răsturnate într'un vas cu apă, se introduce un curent de apă. Se observă prin amestecul în apă al unor corpuscule în suspensie, că există în pâlnie două forme de curenţi (Fig. 9) şi anume: un curent principal ce curge axial dela orificiu în jos şi, în jurul acelui curent, un curent secundar, care este produs de o parte din apa ieşită din pâlnie în vas şi condusă iarăşi în spre gura de intrare a pâlniei, pentru a se înapoia dealungul suprafeţei limitative. Aceasta constitue astfel o suprafaţă de discontinuitate cu privire la vitesă.

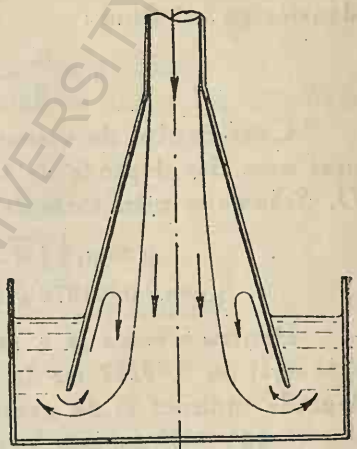


Fig. 9

La ieşirea unei vine de apă printr'un orificiu într'o masă de apă în repaos, se formează de asemenea în jurul vinei o suprafaţă de discontinuitate.

5. — Gaze. Aerul.

Analogia între lichide şi fluidele elastice este atât de mare, încât studiul gazelor (cari în aplicaţiunile hidro-technice intervin în mod accesoriu), este oportun să fie făcut în mare parte concomitent cu studiul lichidelor.

La gaze, precum am spus, volumul sub temperatură constantă depinde foarte mult de presiune. Pentru acelaşi volum, pe de altă parte, presiunea gazelor se schimbă foarte mult cu temperatura, şi de aceea studiul complet al gazelor, la care fenome-

nele calorice au un rol important, în special când este vorba de vapori, nu se poate face fără concursul *Termodinamicei*.

Ne vom ocupa mai ales de *aer* și de cele mai multe ori vom presupune, pentru simplitate, că fenomenele evoluează izoterm. Multe din considerațiunile mecanice ale lichidelor și din teorii, d.e. aceea a curenților, sunt deopotrivă aplicabile și fluidelor elastice, în special în cazurile unde densitatea nu variază mult (aviația) și poate fi considerată aproximativ constantă, ca și în cazul apei.

Aerul la 0^0 și la presiunea barometrică normală de *760 mm* coloană de mercur, are o greutate specifică de

$$\varpi = 1{,}093 \ kg/m^3,$$

densitatea lui fiind :

$$\rho = \frac{\varpi}{g} = \frac{1{,}293}{9{,}87} \approx \frac{1}{8} kg \ sec^2 \ m^4.$$

Coeficientul de viscozitate al aerului este independent de pres une, dar depinde de temperatură, putându-se exprima după *O. Schumann* prin formula

$$\mu = \mu_0 \sqrt{1 + 0{,}0003665\,\theta}\,(1+0{,}0008\,\theta)^2$$

$$\mu_0 = 0{,}0001679 \ g/cm \ sec = 17{,}12.10^{-6} \ kg \ sec/m^2.$$

Pentru a trece la ν, se împarte cu ρ, care la 13^0 în *C. G. S.*, este egal cu *0,00122* iar în *m, kg, sec* cu *0,125*; ν depinzând de ρ, depinde indirect și de presiune:

15^0	*760 mm*	. . . . .	$\nu = 0{,}145$ cm^2/sec
100^0	*760* „	. . . . .	$\nu = 0{,}271$ „ *)
0^0	*7,6* „	. . . . .	$\nu = 13{,}3$ „ **).

6. — Ecuația caracteristică.

Proprietățile fizice principale ale unui corp, și în special elasticitatea, își găsesc expresia în *relațiunea fundamentală* zisă și *ecuația caracteristică* sau *fizică* a corpului.

Oricare ar fi starea unui corp, volumul său v raportat la unitatea de greutate, depinde de temperatura θ și de presiunea p, la cari corpul este supus. Cu alte cuvinte, pentru orice corp există o relație fundamentală

$$f(v, p, \theta) = 0.$$

*) Creștere datorită creșterii temperaturei.
**) Creștere datorită diminuării densității.

In loc de volumul unității de greutate se poate lua acel al unității de masă sau inversul său, densitatea ρ (masa unității de volum); în acest din urmă caz ecuația fizică a corpului va fi de forma

$$f(\rho, p, \theta) = 0.$$

Apa la aceeași temperatură fiind foarte puțin compresibilă, iar variațiunile de volum (sau densitate) la schimbările de temperatură fiind foarte mici, ecuația fizică a apei, dată mai sus, analog ca și pentru orice corp compresibil, în forma

$$V = V_0[1 - \varkappa (p - p_0)] \qquad (1)$$

sau

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}[1 - \varkappa (p - p_0)],$$

poate fi aproximativ înlocuită prin

$$f(\rho) = 0 \quad \text{sau} \quad \rho = const.$$

Pentru *gazele perfecte*, cari ascultă de legea lui *Mariotte* și *Gay-Lussac*, ecuația fizică este

$$pV = p_0 V_0 \left(1 + \frac{\theta}{273}\right) \qquad (2)$$

sau

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}\left(1 + \frac{\theta}{273}\right).$$

Dacă θ este constant, avem forma particulară, aceea a legei lui *Mariotte*,

$$\frac{p}{\rho} = \text{C-tă}. \qquad (2')$$

Corpurile ce vom avea de considerat în Hidraulică, *apa* și *aerul*, satisfac, așa dar, respectiv relația (1) sau (2), aceasta din urmă reducându-se la (2') în cazul fenomenelor izoterme.

Relația gazelor, în cazul unei transformări adiabatice ia forma particulară

$$pV^\gamma = Const. \qquad (3)$$

sau

$$\frac{p}{\varpi^\gamma} = C. \qquad (3')$$

Sub forma diferențială relațiile (1), (2) și (3) se reduc la același tip, fiind respectiv

$$\frac{dV}{V} = -\varkappa dp$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{p} dp$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma p} dp,$$

de unde se vede că la gaze avem,

$$\varkappa = \frac{1}{p} \qquad \text{sau} \qquad \varkappa = \frac{1}{\gamma p},$$

adică $\varepsilon = p$ sau $\varepsilon = \gamma p$,

după cum este vorba de un fenomen izoterm sau adiabatic.

Aplicaţia No. 1. Să considerăm un lichid compresibil, a cărui ecuaţie fizică este de forma : $\rho = a + bp$ şi să presupunem că se cunoaşte valoarea ρ_1 la presiunea atmosferică p_0, precum şi reducerea proporţională $\varkappa_1$ de volum, la creşterea presiunii dela p_0 la $2p_0$, sau, mai general, $\varkappa_n$ dela np_0 la $(n+1)p_0$. A se găsi a şi b.

Soluţie. Avem întâiu : $$\rho_1 = a + bp_0. \tag{1}$$

Pe de altă parte, prin definiţia dată aci lui $\varkappa$ (cu p_0 luat ca unitate de presiune) avem următoarea relaţie între volumele unităţii de masă :

$$\frac{v_n - v_{n+1}}{v_n} = \varkappa_n,$$

sau între densităţi

$$\frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\rho_{n+1}} = \varkappa_n, \tag{2}$$

sau

$$\rho_{n+1} = \frac{\rho_n}{1 - \varkappa_n}. \tag{2'}$$

Ori, ecuaţia fizică dă

$$\rho_{n+1} = a + b(n+1)p_0 \qquad \text{şi} \qquad \rho_n = a + bnp_0.$$

Cu aceste valori relaţia (2') devine

$$a + b(n+1)p_0 = \frac{a + bnp_0}{1 - \varkappa_n} \tag{2''}$$

şi împreună cu (1) rezolvă problema.

Prin eliminarea lui a găsim :

rezultând apoi

$$\begin{cases} b = \rho_1 \dfrac{\varkappa_n}{1 - n\varkappa_n} \dfrac{1}{p_0} \\ a = \rho_1 \dfrac{1 - (n+1)\varkappa_n}{1 - n\varkappa_n}. \end{cases} \tag{3}$$

Exemple. Dacă $\varkappa_0$ este reducerea proporţională dela vid la o atmosferă ($n = 0$), avem :

$$a = \rho_1(1 - \varkappa_0)$$

$$b = \rho_1 = \varkappa_0 \frac{1}{p_0}. \tag{3'}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă $\varkappa_1$ este reducerea proporțională dela *1* la 2 atmosfere ($n = 1$), avem

$$a = \rho_1 \frac{1 - 2\varkappa_1}{1 - \varkappa_1}$$

$$b = \rho_1 \frac{\varkappa_1}{1 - \varkappa_1} \frac{1}{p_0}. \qquad (3'')$$

Se vede că legea formulată conduce la coeficienți, cari depind de împrejurările — presiunea — în cari s'a dat $\varkappa$. Rezultă că, invers, pentru anumite valori adoptate pentru a și b, $\varkappa$ este funcție de presiune sau de numărul n de atmosfere la care se referă.

Intr'adevăr din (2'') rezultă:

$$\varkappa_n = \frac{bp_0}{a + b(n+1)p_0},$$

care e cu atât mai mic cu cât presiunea np_0 va fi mai mare.

Dar problema depinde și de valoarea dată lui ρ.

Dacă în loc de ρ_1 cunoaștem ρ_0 la vid, soluția generală (3) ia o formă mai simplă:

$$a = \rho_0$$

$$b = \rho_0 \frac{\varkappa_n}{1 - (n+1)\varkappa_n} \frac{1}{p_0}, \qquad (4)$$

iar pentru $n = o$,

$$a = \rho_0$$

$$b = \rho_0 \frac{\varkappa_0}{1 - \varkappa_0} \frac{1}{p_0}, \qquad (4')$$

In fine, oricare ar fi n pentru care s'a dat prin măsurătoare reducerea proporțională de volum $\varkappa_n$ la compresiune, neglijând pe $(n+1)\varkappa_n$ pe lângă unitate (când n nu este prea mare), în considerația că $\varkappa_n$ este foarte mic, putem scrie aproximativ egalitățile (4) mai simplu:

$$a = \rho_0$$

$$b = \rho_0 \varkappa_n \frac{1}{p_0}, \qquad (4'')$$

valori cu cari ecuația fizică ia forma

$$\rho_m = \rho_0 (1 + m\varkappa_n), \qquad (5)$$

unde m este numărul de atmosfere (deci variabila curentă, $\gtrless n$), la care se cere densitatea ρ_m. De altfel, oricare ar fi natura funcțiunii $\rho = f(p)$ sau $\rho = f(m)$, pentruca legea liniară (5), formulată mai sus, să se apropie mai mult de realitate, ar trebui ca m și n să nu difere mult între ele.

Plecând, nu dela ρ_0, ci dela ρ_n, în care caz suprapresiunea este $(m-n)p_0$, am scrie

$$\rho_m = \rho_n [1 + (m - n)\varkappa],$$

unde $\varkappa$ se referă la intervalul de presiuni: n până la m atmosfere.

CUJASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aceasta se verifică, evaluându-se aproximativ creşterea $\Delta\rho = \rho_m - \rho_n$ a lui $\rho = f(m)$ pentru $\Delta m = m - n$ cu ajutorul primei derivate:

$$\Delta\rho = \frac{d\rho}{dm}\Delta m = \frac{d\rho/\rho}{dm}\rho(m-n) = \varkappa\rho(m-n).$$

Aplicaţia No. 2. Ecuaţia fizică sub formă diferenţială fiind

$$d\rho = b\,dp,$$

să se exprime densitatea şi presiunea în funcţie de adâncimea z sub suprafaţa liberă a lichidului.

Soluţie Legea hidrostatică (vezi pag. 12) $dp = \varpi\,dz = g\rho\,dz$

dă cu ajutorul ecuaţiei fizice de mai sus:

$$\frac{d\rho}{\rho} = bg\,dz \qquad log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = bgz \qquad \rho = \rho_0\, e^{bgz}$$

sau

$$\varpi = \varpi_0\, e^{bgz}.$$

Ecuaţia fizică, dând presiunea în funcţie de densitate sau de greutatea volumică, permite a se afla prin ultima relaţie presiunea în funcţie de z.

Să găsim d.e. cu această formulă, la o adâncime de *8000 metri*, greutatea unui m^3 apă de mare, a cărei greutate volumică la suprafaţă este de $\frac{36}{35}$ a apei dulci.

Introducând în expresia lui ϖ de mai sus

$$\varpi_0 = \frac{36}{35}\,1000\ kg/m^3,$$

$$bg = \frac{\varpi_0}{p_0}\,\frac{\varkappa}{1-\varkappa}$$ după (3″) din aplicaţia precedentă,

cu

$$p_0 = 10333\ kg/m^2\ \ \varkappa = 0{,}000047 \text{ şi } z = 8000\ m,$$

obţinem

$$\varpi = 1067{,}8\ kg/m^3.$$

Aplicaţia No. 3. Cu ajutorul unei prese hidraulice se face încercarea de rezistenţă la presiune, a unei conducte orizontale de diametru d şi lungime l, la p atmosfere *suprapresiune* (adică peste cea atmosferică). Câtă apă suplimentară se va introduce prin presă, după ce conducta a fost umplută la presiunea atmosferică, şi care va fi lucrul desvoltat prin compresiune. Se va neglija deformarea conductei.

Soluţie. Micşorarea volumului apei din conductă va fi:

$$\varkappa\, p\, \pi\frac{d^2}{4}\,l,$$

atât cât va fi şi volumul de apă suplimentară (în stare comprimată), introdusă în presă.

Lucrul mecanic la compresiunea medie $\frac{p}{2}$ este

$$\mathfrak{C} = \frac{\varkappa}{8}\pi p^2 d^2 l.$$

CAP. II.

ECUAȚIILE FUNDAMENTALE ALE HIDRODINAMICEI.

1. Procedeul întrebuințat în studiul fluidelor.

In studiul unui fluid, se consideră izolată o porțiune din masa fluidului, având la un moment dat o formă determinată, limitată în total sau în parte de restul fluidului sau și de pereții solizi, cu care vine în contact.

Asupra acestei porțiuni de masă, privită ca rigidă (rigiditatea introduce forțe, două câte două egale și de sens contrar, ceeace nu alterează condițiunile mecanice momentane) sau solidificată, acționează două categorii de forțe: pe de o parte forțele *masice*, în general gravitatea, și eventual alte forțe exterioare (d.e., în studiul unei mișcări relative: *forțele de inerție* ale mișcării de antrenare și forța lui *Coriolis*), cari sunt aplicate masei, pe de altă parte forțele *aplicate pe suprafața limitativă* a masei, din partea fluidului înconjurător sau a pereților cu cari se găsește în contact.

Studiul ar fi evident mai simplu, dacă s'ar putea limita la cercetarea mișcării *medii* a masei fluide considerate. Cu toate că și pe această cale se obțin uneori rezultate suficiente în practică, procedeul nu permite cercetarea intimă a fenomenelor și aflarea diverselor relațiuni în forma lor exactă. De aceea, în Hidrodinamică se începe cu studiul unui element sau unei particule infinitezimale de o formă arbitrară (sferică, cilindrică sau paralelipipedică, etc), căreia se obișnuiește a i se da denumirea de *moleculă fluidă*, deci nu în înțelesul fizic al cuvântului.

In modul acesta, particularitățile fenomenelor complexe, ce se petrec într'o masă fluidă finită, se deduc din legile simple cari domină masele elementare, în contact unele cu altele.

Legile acestea, atât la fluidele perfecte cât și la cele viscoase, se exprimă prin ecuațiuni diferențiale cu derivate parțiale.

Integrarea acestor ecuațiuni, în cazurile rare în cari este posibilă, conduce la scopul urmărit. In celelalte cazuri ne mulțumim cu soluțiuni aproximative.

2. Variabilele lui Lagrange şi variabilele lui Euler.

In Hidrodinamică se pot întrebuinţa două sisteme de variabile independente, sau parametri:

1) Putem considera mişcarea în diferite momente t, a unei molecule determinate în poziţiunile ei succesive pe traectorie, raportate la trei axe de coordonate fixe $Oxyz$.

Cum molecula considerată se poate defini prin coordonatele ei x_0, y_0, z_0 din un moment iniţial t_0, iar coordonatele x, y, z, componentele v_x, v_y, v_z, ale vitezelor, componentele j_x, j_y, j_z, ale acceleraţiilor moleculei, etc., în orice alt moment, sunt funcţiuni de , rezultă că aceste cantităţi vor fi, pentru o masă fluidă dată, funcţiuni de x_0, y_0, z_0 şi t, luate ca *variabile independente*.

Această metodă, parametrii ei şi forma ecuaţiilor, la cari se ajunge pe această cale, poartă numele lui *Lagrange* *), constituind o generalizare a mecanicei *punctului material*, la ansamblul de puncte materiale ale unui mediu continuu în mişcare.

2) Putem însă proceda şi altfel: luând într'o masă fluidă un punct geometric oarecare fix A, raportat la un triedru de referinţă $Oxyz$, putem considera mişcarea moleculelor ce trec prin acel punct în diferitele momente t, privind şi atributele lor cinematice: *viteza* şi *acceleraţia*, ca funcţiuni ale locului A şi timpului t, analog ca pentru proprietăţile mecanice sau fizice, ca: *presiune*, *densitate*, *temperatură*, constatate în diversele puncte ale spaţiului şi în diferitele momente.

Pentru întreg spaţiul ocupat de fluid, acele cantităţi vor fi atunci funcţiuni de x, y, z şi t, luate ca parametri. Această metodă, parametrii ei şi ecuaţiunile, la cari se ajunge pe această cale, poartă numele lui *Euler* şi în general sunt preferate pentru studiul *mediilor continue*, cum sunt fluidele.

Să luăm un punct fix A, având drept coordonate x, y, z. Prin acest punct trec în momentele t_1, t_2,... molecule diferite cu vitesele respective v_1, v_2,..., formând un mănunchiu de vectori-viteze, la cari vor fi tangente traectoriile acelor molecule, cari într'un moment iniţial t_0 au ocupat diverse puncte (x_0, y_0, z_0).

In sistemul lui *Lagrange* se consideră vectorul-viteză $\bar{v}$ care, pentru o moleculă ce în t_0 a ocupat un punct (x_0, y_0, z_0), primeşte în punctele, succesiv ocupate pe traiectoria ei trecând prin A, diferite valori, printre cari va fi şi una din valorile menţionate.

---

*) Deşi *Euler* a dat şi ecuaţiunile de forma aceasta, iar nu numai pe acelea cari poartă astăzi de preferinţă numele său.

Acel vector este, așa dar, o funcțiune de t, specială moleculei definită prin (x_0, y_0, z_0), și își are origina fixată pe aceasta, fiind antrenat de ea. Pentru totalitatea moleculelor vectorul v va fi, deci, o funcțiune de (x_0, y_0, z_0, t).

In sistemul lui *Euler* se consideră vectorul vitesă v cu origina fixată în $A\ (x, y, z)$ și care primește succesiv valorile mănuchiului menționat, fiind o funcțiune de t, caracteristică punctului A; pentru totalitatea punctelor, acel vector va fi o funcțiune de (x, y, z, t).

Vedem că, deși în ambele sisteme vom avea pentru masa fluidă considerată, într'un interval de timp, același ansamblu de valori particulare ale vitesei, privită fie ca scalar, fie ca vector, forma funcțiunii sau modul cum se ajunge la aceste valori particulare, prin *variațiunea variabilelor independente adoptate*, diferă în cele două sisteme.

Diferitele funcțiuni și derivatele lor vor avea, așa dar, în metoda lui *Euler*, o formă diferită de aceea din metoda lui *Lagrange*, din cauza deosebirii variabilelor independente (după cum în Geometria Analitică, ecuația unei suprafețe, de exemplu, sau expresia coeficientului unghiular al tangentei, de pildă, diferă după felul coordonatelor adoptate); semnificarea derivatelor parțiale va diferi evident deasemenea, în mod sensibil.

Astfel, derivata parțială în raport cu t a unei funcțiuni oarecare, presupune, în metoda lui *Lagrange*, constanța lui x_0, y_0, z_0, adică identitatea moleculei considerate (la care se referă deci valorile funcțiunilor studiate), pe când metoda lui *Euler* presupune cnnstanța lui x, y, z, adică identitatea punctului geometric fix considerat.

De exemplu la o mișcare rectilinie a moleculelor, derivata vitesei în raport cu t, în primul sistem reprezintă *accelerația* unei molecule oarecare (x_0, y_0, z_0), noțiune bine cunoscută din mecanica punctului, pe când în al doilea sistem ea reprezintă creșterea în unitatea de timp a vitesei constatate în același punct geometric (x, y, z), deci nu la aceeași moleculă. Această din urmă noțiune diferă evident de accelerație.

Ecuațiunile fundamentale ale mișcării se stabilesc în orice caz la început pentru o moleculă determinată, deci după modul de reprezentare al metodei lui *Lagrange*, cu care suntem familiarizați din mecanica punctului material. In urmă, cu resursele calculului se poate face trecerea unei funcțiuni sau unei relațiuni dela un sistem la altul, ținând seama de *schimbarea variabilelor independente*.

3. Mişcări de diferite feluri.

Să considerăm starea fluidului în momentul t, şi să ducem printr'un punct fix A al spaţiului ocupat de fluid, *înveliuita de vitese* ce trece prin acel punct, adică locul geometric limită al punctelor A, A', A'', unde AA' este drumul parcurs de molecula m, aflătoare în A în momentul t, în intervalul dela t la $t+\Delta t$, $A'A''$ drumul parcurs în acelaşi interval de molecula m' ce se găsea în A' în acelaşi moment t, şi aşa mai departe (Fig. 10).

Dacă mişcarea este neregulată, linia astfel trasată din A, şi care la limită (când $\Delta t \to 0$) se numeşte *linie de curent*, are existenţă numai în momentul t, variind în general dela un moment la altul. Numai în primul element AA' această curbă coincide cu traectora moleculei m ce trece prin A în momentul t.

Intr'adevăr, al doilea element $A'A''$ reprezintă drumul parcurs în acelaşi interval Δt de altă moleculă m', într'o direcţie în general diferită de aceea pe care o are molecula m, ce trece prin A' în momentul $t+\Delta t$. O asemenea mişcare se numeşte *variabilă*.

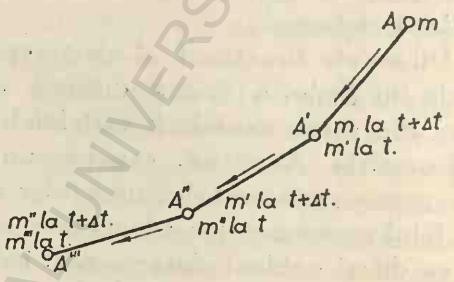


Fig. 10

Un caz particular, care se prezintă des în practică, este acela în care moleculele, cari trec succesiv prin orice punct A, au aceeaşi direcţie. Aceasta se întâmplă de exemplu la un tub capilar sau, aproximativ, la o conductă de apă sau de gaz în circulaţie. In loc de un mănunchiu de direcţii pentru vitesele constatate într'un punct oarecare în diferite momente, avem o singură direcţie, şi deci înveliuita respectivă va fi o linie fixă, adică diferitele înveliuite de vitese nu vor varia cu timpul ci vor fi fixe, coincidând cu traiectoriile. O astfel de mişcare se numeşte *semipermanentă*.

O mişcare şi mai particulară este aceea, în care nu numai direcţia, dar şi mărimea vitesei în orice punct fix rămâne constantă. O asemenea mişcare se numeşte *permanentă*, iar elementele ei cinematice (vitese şi acceleraţii) sunt independente de timp, t dispărând din formulele scrise în sistemul lui *Euler*. De aceea, deseori o asemenea mişcare se numeşte *staţionară*, adică invariabilă cu timpul.

4. Determinarea stării de mişcare a unui fluid în ambele sisteme de variabile.

Mişcarea este evident complet definită, fie dacă se cunosc în orice moment poziţiile diferitelor molecule pe traiectoriile lor (sistemul *Lagrange*), fie dacă, pentru orice punct geometric a spaţiului, ocupat de fluid, se cunosc în orice moment componentele v_x, v_y, v_z *) ale vitezei v după cele trei axe x, y, z (sistemul *Euler*).

In sistemul lui *Lagrange*, aşa dar, (în care variabilele independente sunt: timpul t şi coordonatele x_0, y_0, t_0, ale moleculelor la un moment iniţial t_0), avem ca necunoscute coordonatele x, y, z ale moleculelor în orice moment t.

Aceste coordonate, cari pentru o moleculă (x_0, y_0, z_0) sunt funcţiuni numai de t, devin pentru întregul fluid funcţiuni de x_0, y_0, z_0 şi t:

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$y = f_2(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$z = f_3(x_0, y_0, z_0, t).$$

Din cunoaşterea acestor funcţiuni rezultă traiectoria oricărei molecule, făcându-se să varieze t cu conservarea valorilor parametrice x_0, y_0, z_0 ale moleculei.

Proecţiunile pe cele trei axe ale vitesei unei molecule (x_0, y_0, z_0) într'o poziţie oarecare (x, y, z), fiind derivatele coordonatelor x, y, z, ale traiectoriei respective, în raport cu t, ele se vor deduce prin *derivarea parţială în raport cu* t a funcţiunilor de mai sus:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = \varphi_1(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = \varphi_2(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f_3}{\partial t} = \varphi_3(x_0, y_0, z_0, t),$$

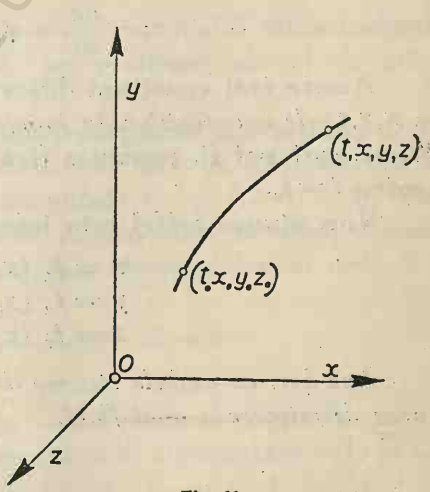


Fig. 11

dx, dy, dz fiind proecţiunile deplasării moleculei în timpul dt.

In mod analog se obţin şi acceleraţiile.

*) Se întrebuinţează des şi notaţia: u, v, w pentru componentele vitesei.

Aşa dar, funcţiunile f_1, f_2, f_3 fiind cunoscute, starea de mişcare a fluidului este complet determinată.

In sistemul lui *Euler*, în care variabilele independente sunt timpul t şi coordonatele x, y, z, ale punctelor geometrice ale spaţiului, ocupate în diferitele momente t de molecule diferite, din cunoaşterea componentelor v_x, v_y, v_z, ale vitesei în orice moment t, în orice punct geometric (x, y, z), adică a funcţiunilor:

$$v_x = \psi_1 (x, y, z, t)$$
$$v_y = \psi_2 (x, y, z, t)$$
$$v_z = \psi_3 (x, y, z, t),$$

rezultă toate particularităţile mişcării.

Intr'adevăr, pentru determinarea *traiectoriilor* diverselor molecule, ţinem seamă că, în lungul acestora, coordonatele x, y, z ale *aceleiaşi molecule* sunt funcţiuni de t, ale căror derivate $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sunt proecţiunile vitesei:

$$\frac{dx}{dt} = \psi_1(x,y,z,t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi_2(x,y,z,t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \psi_3(x,y,z,t).$$

Aceste trei ecuaţiuni diferenţiale de primul ordin definesc pe x, y, z *ale traiectoriilor, în funcţie de timp şi de trei constante arbitrare*, cari pot fi, pentru a fixa ideile, x_0, y_0, z_0, valorile lui x, y, z, pentru $t = t_0$.

Vom ajunge astfel prin integrare la ecuaţiile traiectoriilor:

$$x = f_1 (x_0, y_0, z_0, t)$$
$$y = f_2 (x_0, y_0, z_0, t)$$
$$z = f_3 (x_0, y_0, z_0, t).$$

Aşa dar, *cu ambele sisteme de variabile se poate studia complet starea de mişcare a unui fluid.*

5. Expresia acceleraţiei în ambele sisteme de variabile.

S'a explicat mai sus că vectorul $\bar{v}$ al vitesei sau oricare din componentele lui v_x, v_y, v_z, deşi într'un anumit punct al spaţiului ocupat de un fluid are la un moment dat o valoare particulară determinată, aceeaşi în ambele sisteme, însă ca funcţiune îmbracă forme deosebite.

In sistemul lui *Lagrange* $\bar{v}$ este un *vector caracteristic al moleculei* (mobile), având origina pe punctul material, adică pe *substanţă*, şi deplasându-se cu aceasta, pe când în sistemul lui *Euler* v este un *vector caracteristic al punctului geometric*, adică al *locului*, în care îşi are fixată origina. Primul vector s'ar putea numi *substanţial* iar al doilea *local*.

Din cauză că operaţiunile de derivare diferă în cele două sisteme, expresia acceleraţiei, în proecţie pe cele trei axe, va diferi deasemenea.

Să considerăm vectorul acceleraţiunei $\bar{j}$ al unei molecule, care în momentul t_1 ocupă punctul A_1. In cinematică acest vector se defineşte ca fiind, la limită, diferenţa geometrică a vitezelor acelei molecule în două momente infinit apropiate t_1 şi $t_2 = t_1 + \Delta t$, împărţită cu intervalul de timp Δt. Avem

$$\bar{j} = lim \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{\Delta t}$$

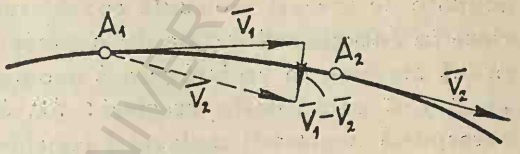


Fig. 12.

în care v_1 *şi* v_2 sunt valorile scalare ale vectorului vitesei, aferent moleculei, în cele două momente sau poziţiuni ale ei A_1 şi A_2 (Fig. 12).

Pentru a exprima de exemplu proecţiunea j_x a acceleraţiei în oricare din sisteme, vom lua valorile v_{x1} şi v_{x2} din punctele A_1 şi A_2 ale aceleaşi traectorii în momentele t_1 şi $t_2 = t_1 + \Delta t$, *când aceeaşi moleculă ocupă succesiv acele puncte*, deci în două circumstanţe (1) şi (2) bine definite în ambele sisteme, şi vom scrie

$$j_x = lim \frac{v_{x2} - v_{x1}}{\Delta t} \text{ pentru } \Delta t \to 0.$$

Dacă luăm pe v_{x1} şi v_{x2} ca valori particulare ale funcţiunei v_x din sistemul *Lagrange*, la trecerea dela circumstanţa (1) la circumstanţa (2), din cei patru parametri x_0, y_0, z_0 şi t numai t variază, deoarece parametrii x_0, y_0, z_0 (poziţia iniţială în t_0), determinatori ai moleculei, rămân aceiaşi în ambele circumstanţe.

Funcţiunea j_x se va exprima în sistemul lui *Lagrange* cu ajutorul *derivatei parţiale* a lui

$$v_x = \varphi_1 (x_0, y_0, z_0, t_0)$$

în raport cu t, deci prin

$$j_x = lim \frac{v_{x_2} - v_{x_1}}{\Delta t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \text{ putându-se scrie } j_x = \frac{dv_x}{dt}. \quad (1)$$

Derivata $\frac{dv_x}{dt}$ *), astfel înţeleasă, se poate numi *derivată substanţială*, întrucât se referă la aceeaşi moleculă, adică la *substanţă*.

Expresia de mai sus este aceeaşi ca şi în cinematica punctului, unde însă v_x se prezintă ca funcţiune exclusivă de t.

In sistemul lui *Euler*, considerând pe v_{x_1} şi v_{x_2} ca valori particulare ale funcţiei

$$v_x = \psi_1 (x, y, z, t),$$

ca să trecem dela circumstanţa (1) la circumstanţa (2), adică dela punctul A_1 la punctul A_2 în momentele în cari aceste puncte sunt ocupate de aceeaşi moleculă considerată, trebue să facem să varieze în funcţiunea v_x, pe de o parte t cu Δt, ceeace dă lui v_x o primă creştere în acelaşi punct geometric A, iar pe de altă parte pe x, y, z cu anumite creşteri: Δx, Δy, Δz, nu arbitrare, ci cari corespund deplasării moleculei considerate pe traectoria ei, în acelaşi interval Δt, adică

$$\Delta x = v_x \Delta t$$
$$\Delta y = v_y \Delta t$$
$$\Delta z = v_z \Delta t,$$

ceeace dă lui v_x o a doua creştere, datorită strămutării spaţiale în acelaşi moment t.

In modul acesta diferenţa $v_{x_2} - v_{x_1}$, neglijând diferenţele de ordin superior, are următoarea compoziţie

$$v_{x_2} - v_{x_1} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z,$$

întrebuinţând derivatele parţiale în sistemul lui *Euler*.

Rezultă

$$j_x = lim \frac{v_{x_2} - v_{x_1}}{\Delta t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z. \quad (2)$$

La acest rezultat, bazat chiar pe definiţia funcţiunii j_x, se putea ajunge şi pe cale de calcul, traducând în sistemul lui *Euler*

*) Stokes a întrebuinţat notaţia $\frac{Dv_x}{Dt}$ pentru această derivată.

derivata substanţială $\frac{dv_x}{dt}$, care exprimă acceleraţia în sistemul lui *Lagrange*. In adevăr, trecerea dela funcţiunea $v_x = \varphi_1 (x_0, y_0, z_0, t)$ la funcţiunea $v_x = \psi_1 (x, y, z, t)$ se face printr'o schimbare a variabilelor independente. De aceea, a lua derivata parţială a lui v_x în raport cu t în sistemul lui *Lagrange*, echivalează cu a lua derivata totală în raport cu t în sistemul lui *Euler*, ţinând seamă de legătura dintre nouile variabile independente x, y, z, t şi cele vechi x_0, y_0, z_0, t, printre acestea din urmă variind numai t. Obţinem astfel, însemnând cu $\frac{d}{dt}$ şi derivata totală din sistemul lui *Euler*:

$$\frac{dv_x}{dt} \text{ (deriv. substanţială)} = \frac{dv_x}{dt} \text{ (deriv. totală } \textit{Euler}),$$

adică

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{dv_x}{dz}\frac{dz}{dt} \qquad (\textit{Euler}).$$

Ţinând seamă de relaţiile de legătură (ecuaţiile traectoriilor)

$$\begin{aligned} x &= f_1 (x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= f_2 (x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= f_3 (x_0, y_0, z_0, t), \end{aligned}$$

cari dau:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} = v_x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial t} = v_y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f_3}{\partial t} = v_z, \end{aligned}$$

rezultă expresia (2) de mai sus.

Derivatele $\frac{\partial v_x}{\partial t}$, etc. se pot numi *locale*, deoarece se referă la creşterea vitesei în acelaşi punct fix, adică pe loc.

Este de observat că, în aceeaşi ecuaţie diferenţială termenii pot figura, eventual, parte într'un sistem şi parte într'altul, însă cu notaţiuni diferite spre a se evita orice confuzie.

La o mişcare *permanentă* sau *staţionară*, deoarece în fiecare punct al spaţiului vitesa este un vector constant cu timpul, în sistemul lui *Euler* derivatele parţiale în raport cu t (deci locale) vor fi nule. Dacă nici presiunea nici temperatura nu variază cu timpul în acelaşi punct al spaţiului, atunci nu numai mişcarea, dar întreaga stare mecanică şi fizică a fluidului va fi permanentă, iar *variabilele independente Euler* se vor reduce numai la trei:

x, y, z. Într'adevăr nici densitatea n'ar putea varia într'un punct, după cum rezultă din relația fundamentală, care, pentru orice materie, leagă între ele cantitățile p, ρ și θ. La lichide, în ipoteza $\rho = const.$, permanența stării mecanice nu implică neapărat constanța câmpului scalar al temperaturei, din cauză că aceasta influențează prea puțin densitatea.

6. — Ecuațiile unui fluid perfect.

a) *Ecuațiile mecanice.* Să considerăm într'un fluid, la un moment dat t, o moleculă de masă m, presupusă rigidă, care este limitată printr'o suprafață închisă ce o desparte de restul fluidului. Să luăm în interiorul ei un punct A, care, ținând seamă de dimensiunile mici ale masei, se poate considera ca centrul de greutate al acesteia. Considerațiunile de echilibru sau de mișcare ale moleculei nu se schimbă dacă, suprimând restul fluidului, aplicăm asupra tuturor elementelor $d\Omega$ ale menționatei suprafețe forțele interne $fd\Omega$, exercitate pe ele de fluidul suprimat și care pentru molecula considerată devin acum forțe exterioare.

Să presupunem componentele tangențiale neglijabile, adică fluidul perfect, în care caz $fd\Omega$ sunt numai forțele elastice, constituind presiuni normale pe suprafață. Pentru punerea în ecuație a mișcării centrului de greutate A al moleculei, vom presupune masa m și toate forțele ce o acționează, aplicate în A (Fig. 13).

Fie $\overline{R}$ rezultanta forțelor exterioare masice (în general numai gravitația), cari solicită molecula, și $\overline{P}$ rezultanta de translație a forțelor elastice $fd\Omega$ de pe suprafața ei.

Fie $\overline{j}$ accelerația din punctul A în momentul considerat și deci accelerația masei m. Vom avea între vectori relația geometrică

$$m\overline{j} = \overline{R} + \overline{P}$$

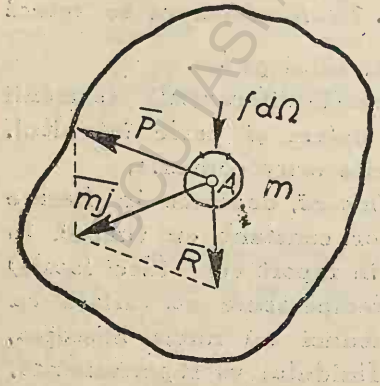


Fig. 13

sau, în proecție pe axa x, relația algebrică

$$mj_x = R_x + P_x.$$

Împărțind vectorii cu m, relațiile de mai sus devin

$$\overline{j} = \frac{\overline{R}}{m} + \frac{\overline{P}}{m}$$

și

$$j_x = \frac{R_x}{m} + \frac{P_x}{m}.$$

In natură accelerațiile sunt finite și, cum cei doi termeni din membrul al doilea exprimă accelerațiile de translație, imprimate moleculei sub acțiunea forțelor masice și a celor elastice, rezultă că, dacă facem să tindă m către zero, expresiile

$$lim \frac{\overline{R}}{m} = \overline{F}$$

și

$$lim \frac{\overline{P}}{m} = \overline{F}_1$$

vor fi cantități finite. Ele reprezintă, reduse la unitatea de masă cele două forțe ce acționează molecula fluidă a punctului A.

Forța masică $\overline{F}$, care caracterizează câmpul forței exterioare, se mai numește și *intensitatea câmpului*. Pentru gravitație avem

$$\overline{F} = \overline{g}.$$

Dacă, în loc de a raporta pe $\overline{R}$ și $\overline{P}$ la unitatea de masă, le-am raporta la unitatea de volum, ar trebui să le împărțim prin volumul V al masei m:

$$lim \frac{\overline{R}}{V} = \overline{F'}$$

$$lim \frac{\overline{P}}{V} = \overline{F'}_1$$

și cum $m = \rho V$ rezultă:

$$\overline{F'} = \rho \overline{F}$$

$$\overline{F'}_1 = \rho \overline{F}_1.$$

Prima forță $\overline{F'}$ (raportată la unitatea de volum) se numește *forță volumică*[1]). In cazul gravitației avem:

$$\overline{F'} = \rho \overline{g} = \overline{\varpi}.$$

adică *greutatea volumică* (specifică), pe care o vom însemna în general cu ϖ (diferit de π spre a evita confuzia), în cărțile germane întrebuințându-se notația γ.

Ecuația vectorială de mai sus se desface în următoarele trei ecuații algebrice, între proiecțiile pe cele trei axe:

$$j_x = F_x + F_{1x}$$
$$j_y = F_y + F_{1y}$$
$$j_z = F_z + F_{1z}.$$

[1]) Adjectiv propus de Hospitalier și care exprimă mai mult decât denumirea generică: *specifică*, întrebuințată deobiceiu.

Să căutăm pentru punctul A, atât în cazul general al echilibrului, cât şi în cazul mişcării fluidului perfect (cazuri în cari ştim că presiunile sunt normale pe suprafeţele elementare, pe cari se exercită), proecţiile forţei elastice raportată la unitatea de masă

$$\overline{F_1} = lim\ \frac{\overline{P}}{m}.$$

Să ne închipuim că molecula în momentul considerat are forma unui cilindru infinit mic, a cărui axă se întinde dela un punct fix $A(x,y,z)$ până la $A'(x+\Delta x,y,z)$. Fie $\Delta\sigma$ secţiunea dreaptă a cilindrului, aleasă suficient de mică pentru ca bazele $\Delta\Omega$ şi $\Delta\Omega'$, de o înclinare arbitrară, să nu se taie în interiorul cilindrului. Pentru a găsi pe F_{1x}, proectăm pe axa x forţele elastice ce se exercită normal pe suprafaţa moleculei şi din cari intervin evident numai acelea cari lucrează pe feţele $\Delta\Omega$ şi $\Delta\Omega'$ cu presiunile p şi p' pe unitatea de suprafaţă. Vom avea astfel

$$F_{1x} = \frac{P_x}{m} = \frac{p\,\Delta\Omega\,cos\,\sphericalangle(n,x) - p'\,\Delta\Omega'\,cos\,\sphericalangle(n',-x)}{m},$$

luându-se cosinusul unghiului format de direcţia forţei, sau a normalei interioare $\overrightarrow{n}$ şi $\overrightarrow{n'}$, cu $+x$, sau cosinusul unghiului suplimentar (format cu $-x$), în ultimul caz schimbând semnul (vezi fig 14).

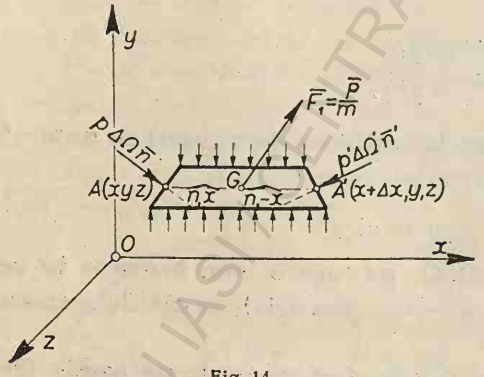


Fig. 14

Unghiurile $\sphericalangle(n,x)$ şi $\sphericalangle(n',-x)$ pot varia între 0^0 şi 90^0 de o parte şi de alta a axei AA', având cosinusul pozitiv, astfel că

$$\Delta\Omega\,cos\,\sphericalangle(n,x) = \Delta\sigma$$

$$\Delta\Omega'\,cos\,\sphericalangle(n',-x) = \Delta\sigma.$$

Cum pe de altă parte

$$m = \rho\,\Delta\sigma\,\Delta x$$

obţinem

$$F_{1x} = lim\ \frac{(p-p')\,\Delta\sigma}{\rho\,\Delta\sigma\,\Delta x} = lim\ \frac{p-p'}{\rho\Delta x}.$$

In momentul considerat t făcând volumul moleculei să tindă, asemenea cu el însuşi, către zero, astfel ca A' să vină în A, Δx se va anula, şi cum F_{1x} este o cantitate finită, trebue ca şi numă-

rătorul să tindă către zero. O primă constatare, pe care o facem deci (drept consecință a ipotezei că eforturile tangențiale sunt nule), este că în punctul A vom avea

$$p=p',$$

adică, într'un punct oarecare al unui *fluid perfect* presiunea pe unitatea de suprafață este aceeași, oricare ar fi orientarea elementului de suprafață ce trece prin punct. Fie p această valoare scalară univocă a presiunii unitare, care, în momentul t caracterizează punctul A, fiind o *funcțiune uniformă de* x,y,z (adică cu o singură valoare pentru un x,y,z).

Expresia de mai sus ia forma

$$\frac{p-(p+\Delta p)}{\rho\Delta x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Volumul cilindrului tinzând către zero, $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ devine derivata parțială $\frac{\partial p}{\partial x}$ în sistemul lui *Euler*, întrucât celelalte variabile y,z,t au rămas neschimbate. Avem, așa dar, în acest sistem

$$F_{1x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

și tot astfel

$$F_{1y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$F_{1z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Este destul a observa analogia funcțiunii uniforme $p=f(x,z,y)$ cu aceea a unei funcțiuni de forță $f(x.y,z)$, a cărei derivată într'o direcție oarecare reprezintă proecția intensității câmpului de forță pe acea direcție, pentru a deduce că derivatele parțiale $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ reprezintă efectiv proecțiile unui vector ca și $\overline{F}$ de mai sus, care în general derivă dintr'o funcțiune de forță sau un *potențial* (egal prin definiție cu acea funcție luată cu semn schimbat). Acest vector va avea în fiecare punct direcția normalei $\overline{n}$ a suprafeței $p=const$ ce trece prin acest punct, va fi îndreptat în sensul lui p crescător (în care socotim pe $\overline{n}$) și va avea valoarea $\frac{\partial p}{\partial n}$.

Pentru mai multă rigoare vom da totuși și o demonstrație

directă despre existența acestui vector, care, înmulțit cu $-\frac{1}{\rho}$, conduce la existența lui G_p. Într'adevăr să definim un astfel de vector $\overline{G}_p$ în direcția normalei menționate, având drept valoare scalară

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n}.$$

Vom avea analitic

$$G_p = \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dn}$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x}\cos\sphericalangle(n,x) + \frac{\partial p}{\partial y}\cos\sphericalangle(n,y) + \frac{\partial p}{\partial z}\cos\sphericalangle(n,z).$$

Ori, parametrii directori ai normalei la suprafața

$$p = f(x,y,z) = const.$$

(și deci și ai lui $\overline{G}_p$) sunt, precum se știe:

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z},$$

astfel că, punând

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2}$$

vom avea:

$$\cos\sphericalangle(n,z) = \frac{1}{A}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\cos\sphericalangle(n,y) = \frac{1}{A}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\cos\sphericalangle(n,z) = \frac{1}{A}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Inlocuind mai sus derivatele parțiale prin valorile trase de aci, găsim

$$G_p = A$$

și deci:

$$G_{px} = A\cos\sphericalangle(n,x) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$G_{py} = A\cos\sphericalangle(n,y) = \frac{\partial p}{\partial y}$$

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

$$G_{fz} = A \cos \sphericalangle(n, z) = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Așa dar, vectorul $\overline{G}_p$, definit ca mai sus, are drept proecții derivatele parțiale respective ale lui p, în orice sistem de axe ortogonale. El se numește *gradient* al funcțiunei scalare $p = f(x,y,z)$ și, după notația calculului vectorial, se înseamnă *grad p*. Cu ajutorul său putem exprima vectorul $\overline{F}_1$:

$$\overline{F}_1 = -\frac{1}{\rho}\overline{G}_p = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{\rho} grad\ p.$$

Dacă forța elastică, în loc de a se raporta la unitatea de masă, s'ar raporta la unitatea de volum, am avea

$$F_1' = -grad\ p.$$

Inmulțind proecțiile lui $\overline{F}_1$ respectiv cu dx, dy, dz și adunând (cu observarea că obținem astfel expresia lucrului real sau virtual al lui F_1 pentru o deplasare ds reală sau fictivă, ale cărei proecții ar fi dx, dy, dz), vom avea:

$$F_1 ds \cos \sphericalangle(F_1, ds) = -\frac{1}{\rho} dp = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} ds$$

$$F_1 \cos \sphericalangle(F_1, ds) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Valoarea maximă a lui $\frac{\partial p}{\partial s}$ corespunde evident gradientului $\frac{\partial p}{\partial n}$, în care caz

$$\cos \sphericalangle(F_1, dn) = 1.$$

Se vede că *valoarea absolută a lui F_1 este cu atât mai mare, cu cât gradientul presiunei este mai mare și cu cât densitatea ρ este mai mică*, adică volumul unității de masă mai mare (prezentând deci o mai mare suprafață forțelor elastice). In sfârșit, *direcția și sensul lui $\overline{F}_1$ coincide cu direcția și sensul invers ale gradientului lui p, deci cu acelea ale descreșterii maxime a presiunii.*

In cazul gazelor, ρ fiind foarte mic, se poate deseori neglija $\overline{F}$ pe lângă $\overline{F}_1$ care conține pe ρ la numitor.

Cum într'un punct oarecare al unui fluid *perfect*, din cauza lipsei de eforturi tangențiale, există la orice moment dat t o singură valoare p a presiunii unitare (adică p este o *funcție uni-*

formă), starea fluidului va fi complet determinată din punct de vedere cinematic și mecanic, dacă, în sistemul lui *Lagrange*, s'ar cunoaște în orice moment x, y, z, p și ρ pentru orice moleculă, iar în sistemul lui *Euler*, dacă s'ar cunoaște în orice moment v_x, v_y, v_z, p și ρ pentru orice punct al spațiului ocupat de fluid.

Pentru aceste cinci funcțiuni necunoscute ne trebuesc cinci ecuații.

Mecanica ne-a procurat un sistem de trei ecuațiuni de echilibru sau de mișcare, cari, dacă se introduce expresia analitică găsită pentru proecțiunile lui F_1, iau forma:

$$\begin{aligned} j_x &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ j_y &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ j_z &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \qquad (1)$$

unde ultimii termeni cuprind derivate parțiale în sistemul lui *Euler*. Expresia analitică a acceleraților din primul membru a fost dată mai sus în ambele sisteme.

O a patra ecuație este *ecuația caracteristică* sau *fizică* a fluidului, despre care s'a tratat mai sus. A cincea ecuație este așa numita *ecuație de continuitate*.

b) *Ecuația de continuitate*. Această ecuație exprimă faptul că masele se conservă, putând fi privită ca o relațiune *geometrică* sau *cantitativă*. Ea se obține în sistemul lui *Lagrange*, exprimând că masa moleculei rămâne aceeași pe traectoria ei, în timpul când se deplasează deformându-se. In sistemul lui *Euler* se obține, exprimând că pentru un spațiu, limitat de o suprafață fixă, excedentul maselor intrate asupra celor ieșite în intervalul dt este egal cu creșterea în același interval a masei cuprinse în acea suprafață.

Dacă V este volumul moleculei mobile, conservarea masei de alungul traectoriei (sistemul *Lagrange*) se exprimă astfel

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = 0,$$

unde primul membru trebue să reprezinte o derivată substanțială, însemnată uneori cu D, după cum am mai menționat în nota pag. 34.

Această ecuaţie se desvoltă în

$$V\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{dV}{dt}=0$$

sau

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{\rho}{V}\frac{dV}{dt}=0. \quad (1)$$

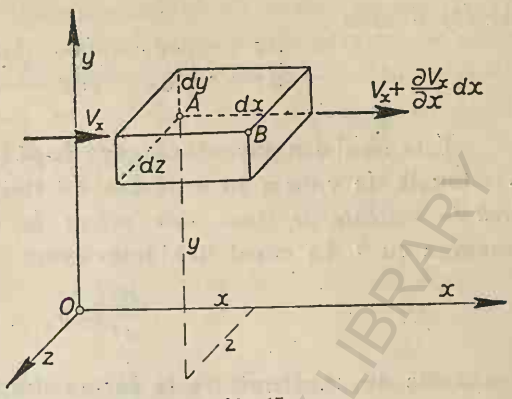


Fig. 15

Să considerăm în momentul t o particulă paralelipipedică (Fig. 15) cu un vârf în A (x, y, z) şi având ca laturi dx, dy, dz. In acelaşi moment t, dacă ne strămutăm spaţial la extremitatea lui dx, creşterile de vitesă sau vitesele relative din acest punct, faţă de acelea din punctul A, după cele trei axe, sunt respectiv:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}dx\ ,\ \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\ ,\ \frac{\partial v_z}{\partial x}dx.$$

In intervalul dt paralelipipedul drept devine oblic, iar în virtutea viteselor relative de mai sus proecţiunile pe cele trei axe ale muchiei dx vor deveni în momentul $t+dt$:

$$(1+\frac{\partial v_x}{\partial x}dt)dx\ ,\ \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\,dt\ ,\ \frac{\partial v_z}{\partial x}dx\,dt,$$

însă, neglijând infiniţii mici de ordin superior, lungimea nouă a acestei muchii poate fi reprezentată numai prin proecţia pe axa Ox

$$(1+\frac{\partial v_x}{\partial x}dt)\,dx.$$

Unghiurile paralelipipedului oblic diferind infinit de puţin de un unghiu drept, noul volum, cu neglijarea infiniţilor mici de ordin superior, va fi

$$V+\frac{dV}{dt}dt=\left[1+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz,$$

de unde, ţinând seamă că

$$V=dx\,dy\,dz,$$

rezultă

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\ , \quad (2)$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar (1) devine

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0. \qquad (1')$$

Trinomul din parenteză, care după (2) reprezintă creșterea proporțională de volum în unitatea de timp, se numește *dilatație cubică în unitate de timp* sau *viteză de dilatație cubică*, și o vom însemna cu θ. In cazul lichidelor avem

$$\frac{d\rho}{dt}=0,$$

și ecuația de continuitate ia forma simplă

$$\theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \qquad (3)$$

de altfel evidentă, deoarece dilatația cubică în cazul unui fluid incompresibil trebue să fie nulă.

Această ecuație, în caz de variațiuni de presiune mici, se aplică aproximativ și aerului.

Dar ecuația (1'), desvoltând derivata substanțială $\frac{dz}{dt}$, se mai poate scrie

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0, \qquad (4)$$

ecuație stabilită de *Euler*, plecând însă, după cum am văzut, dela modul de reprezentare a lui *Lagrange*.

Sub această din urmă formă ecuația se poate stabili și direct în sistemul lui *Euler*, mult mai simplu, exprimând că, în timpul dt excesul maselor, intrate în paralelipiped prin fața $dy\,dz$ și anume

$$\rho v_x\,dy\,dz\,dt,$$

asupra celor ieșite prin fața opusă și anume

$$\left[\rho v_x+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\,dx\right]dy\,dz\,dt,$$

adică

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\,V dt$$

(*fluxul de masă rezultant intrând* prin cele două fațete opuse $dy\,dz$), plus excesele analoage, relative la celelalte două perechi de fețe opuse, dau creșterea în același interval dt a masei din interior, adică

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} V\,dt\,.$$

Cum suma

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$$

nu este altceva decât fluxul total de masă intrând prin întreaga suprafață limitativă în unitatea de timp, flux raportat la unitatea de volum (mai pe scurt *fluxul intrând* al vectorului $\rho\bar{v}$ raportat la unitatea de volum), această sumă, luată cu semnul schimbat, exprimă *fluxul ieșind* de *masă* sau al vectorului $\rho\bar{v}$.

In calculul vectorial, *fluxul total ieșind* al unui vector oarecare, flux raportat la unitatea de volum, se numește *divergența vectorului* și se înseamnă cu *div*. Astfel, ecuația de continuitate (3) din cazul fluidelor incompresibile se poate scrie

$$div\,\bar{v} = 0,$$

iar ecuația (4) sub forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\rho\bar{v} = 0\,.$$

Constatăm că $div\,\bar{v}$ coincide cu *vitesa de dilatație cubică*.

La ecuația (1') se poate ajunge în fine și pe o a treia cale, care revine de fapt la cea dintâi, și anume întrebuințând fomulele schimbării de variabile la o integrală triplă cu ajutorul *determinantului funcțional*. Intradevăr, mediul fluid din momentul t se transformă în intervalul dt, prin următoarea schimbare de variabile sau *transformare*

$$x_1 = x + v_x\,dt$$
$$y_1 = x + v_y\,dt$$
$$z_1 = x + v_z\,dt.$$

Să luăm în momentul t o suprafață închisă S, limitând un volum V. In momentul $t_1 = t + dt$, moleculele suprafeței S se vor găsi pe suprafața transformată S_1, iar moleculelor interioare lui S

le vor corespunde molecule transformate în interiorul lui S_1. Așadar, masa din S_1 va fi aceeași ca în S, deci:

$$\iiint_{V_1} \rho_1 \, dx_1 dy_1 dz_1 - \iiint_{V} dx\, dy\, dz = 0.$$

Determinantul funcțional al transformării fiind

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{vmatrix},$$

se știe că elementul diferențial $dx_1\, dy_1\, dz_1$ se poate înlocui prin $D\, dx\, dy\, dz$, prima integrală triplă făcându-se atunci în limitele volumului V ca și a doua. Așa dar, contopind cele două integrale, vom avea

$$\iiint_{V} (\rho_1 D - \rho) dx\, dy\, dz = 0.$$

Cum volumul V este arbitrar, trebue să avem

$$\rho_1 D - \rho = 0, \qquad (1'')$$

o formă concentrată a ecuației de continuitate.

Intradevăr, exprimând derivatele lui x_1, y_1, z_1 și înlocuindu-le în D, obținem

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt & \frac{\partial v_x}{\partial y} dt & \frac{\partial v_x}{\partial z} di \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} dt & 1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt & \frac{\partial v_y}{\partial z} dt \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} dt & \frac{\partial v_z}{\partial y} dt & 1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt \end{vmatrix},$$

și cum

$$\rho_1 = \rho + \frac{d\rho}{dt} dt,$$

ecuația (1''), după ce suprimăm infiniții mici de ordin superior și împărțim cu dt, ia forma (1') a ecuației de continuitate.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă în fluid considerăm anumite suprafețe limitative, fie fixe, fie mobile, ecuația de continuitate este înlocuită acolo printr'o condiție de suprafață. Astfel;

a) Pentru suprafața de contact cu un perete solid fix, având drept cosinusuri directoare ale normalei l, m, n, vitesa moleculelor în contact cu peretele trebuind să fie tangențială acestuia, vom avea condiția de perpendicularitate

$$lv_x + mv_y + nv_z = 0, \tag{5}$$

componenta de vitesă, normală peretelui, fiind nulă.

b) Pentru un perete mobil, a cărui suprafață de contact cu fluidul $F(x, y, z, t,) = 0$ este animată, în diversele ei puncte, de vitesele v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}, vitesele moleculelor fluide din aceeași suprafață fiind v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}, ecuația (5) se va pune, nu pentru vitesele absolute, ci pentru cele relative ale fluidului față de perete, și va lua evident forma

$$l(v_{x_2} - v_{x_1}) + m(v_{y_2} - v_{y_1}) + n(v_{z_2} - v_{z_1}) = 0, \tag{6}$$

componentele normale ale viteselor respective fiind egale și neputând astfel exista salt de vitesă (vitesă relativă) decât la componentele tangențiale.

c) Pentru o *suprafață de discontinuitate cu privire la vitesă* lucrurile se petrec în mod analog, putând presupune că fluidul de o parte a acelei suprafețe este înlocuit printr'un perete solid deformabil, astfel că condiția la suprafață este de aceeași formă (6); și în acest caz discontinuitatea constă numai într'un salt de vitesă tangențial suprafeței.

d) In cazul când nu există nici salt de vitesă tangențial unei suprafețe, aceasta nu se poate concepe decât formată materialicește din aceleași molecule de fluid, astfel că vitesele tuturor moleculelor, așezate pe suprafață, vor fi însăși vitesele punctelor suprafeței, pe care deci nu o vor părăsi.

Dacă $F(x, y, z, t) = 0$ este ecuația unei suprafețe limită din cazurile *a*), *b*) sau *c*), suprafață ce în general se deplasează și eventual se și deformează, se poate arăta ușor că vom avea pentru orice punct al ei

$$\frac{dF}{dt} = 0, \tag{7}$$

adică derivata substanțială nulă. Mai întâiu aceasta rezultă imediat pentru cazul *d*). Intr'adevăr o suprafață $F = 0$ (ce într'un anumit moment t conține o serie de molecule) după timpul dt

găsindu-se pe aceeași suprafață $F(x, y, z, t + dt) = 0$, coordonatele noi ale moleculelor $x + v_{x_2}\,dt$, $y + v_{y_2}\,dt$, $z + v_{z_2}\,dt$, vor continua a o satisface, dând

$$F(x + v_{x_2}\,dt,\ y + v_{y_2}\,dt,\ z + v_{z_2}\,dt, t + td) = 0. \qquad (8)$$

Cum însă $v_2 = v_1$, putem înlocui componentele vitezelor moleculelor prin acelea ale punctelor suprafeței. Din ecuația (8), astfel scrisă, și din $F(x, y, z, t) = 0$ însă rezultă (7).

In celelalte cazuri *a*) *b*) *c*), într'o suprafață limitativă

$$F(x, y, z. t) = 0$$

existând numai salturi de viteză tangențială, moleculele aflate de o parte și de alta a suprafeței vor aluneca tangențial unele față de altele fără a părăsi suprafața F, adică vom continua a avea egalitatea (8), ajungând la aceeași concluzie.

c) *Ecuația energiei.* Să presupunem că forțele exterioare admit un potențial U astfel ca

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

și că

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Inmulțind ecuațiile mecanice:

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

respectiv cu v_x, v_y, v_z, obținem

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} + \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho}\left(v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y} + v_z\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Dacă înmulțim cu masa elementară

$$dM = \rho\,dx\,dy\,dz$$

ECU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

și integrăm într'un domeniu volumic, punând :

$$T = \frac{1}{2}\int v^2\, dM$$

și

$$V = \int U\, dM,$$

obținem

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -\int\int\int \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz, \qquad (1)$$

unde T este energia cinetică a masei din domeniu și V energia ei potențială, datorită câmpului forțelor exterioare, în momentul t.

In membrul al doilea obținem prin integrare parțială

$$\int\int\int v_x \frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz = \int\int (pv_x)\, dy\, dz - \int\int\int p \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

unde pv_x se vor lua în punctele, unde cilindrul de secțiune $dy\, dz$, paralel cu axa x, străpunge suprafața domeniului, și cu semnul convenabil (— la limita inferioară și + la limita superioară a lui x, schimbând alternativ semnul în caz de mai mult decât două străpungeri).

Dacă l, m, n sunt cosinusurile directoare ale normalei *interioare* a suprafețelor elementare $d\Omega$ la locurile de străpungere, vom avea

$$\pm\, dy\, dz = l\, d\Omega,$$

+ dacă normala face unghiu ascuțit cu $+x$ și — în caz contrar, deci invers semnului lui pv_x. Găsim astfel

$$\int\int (pv_x)\, dy\, dz = -\int pv_x\, l\, d\Omega,$$

integrala întinzându-se asupra întregei suprafețe limitative a regiunii.

Transformând în același fel și ceilalți doi termeni ai ecuației (1), aceasta devine

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \int p\,(lv_x + mv_y + nv_z)\, d\Omega + \int\int\int p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\,. \qquad (2)$$

In cazul unui fluid incompresibil, ecuația se reduce la

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \int p\,(lv_x + mv_y + nv_z)\, d\Omega.$$

Așa dar, creșterea energiei totale a masei fluide considerată (energia cinetică plus cea potențială datorită forței F) este egală cu lucrul mecanic efectuat de presiunea exterioară asupra masei.

In cazul special când regiunea este limitată numai de pereți solizi, pentru cari avem $lv_x + mv_y + nv_z = 0$, relația se reduce la $T+V = const.$

La gaze, p fiind numai funcție de ρ, se poate da și ultimului termen al ecuației (2) un înțeles analog. In acest scop să însemnăm cu

$$E_{p_0}^{p} = -\int_{p_0}^{p} p\, dv = -\int_{p_0}^{p} p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

lucrul mecanic efectuat de presiunea exterioară asupra masei unitare, pentru a o aduce dintr'un anumit volum inițial mai mare $\frac{1}{\rho_0}$ la volumul actual mai mic $\frac{1}{\rho}$, comprimarea făcându-se de la p_0 la p. E va reprezenta, raportată la unitatea de masă, *energia internă* acumulată astfel în fluid; în cazul unei *evoluțiuni adiabatice* avem

$$E_{p_0}^{p} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0}\right);$$

dacă evoluția nu este adiabatică și în timpul compresiunei avem o absorbție de căldură Q, atunci creșterea energiei va fi

$$E_{p_0}^{p} = -\int p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + JQ,$$

unde J este echivalentul mecanic al căldurei.

Expresia de sub integrala de volum din (2), având ca factor dilatația cubică în unitatea de timp, adică divergența vectorului $\bar{v}$, care, după cum am văzut, este egală cu $-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, devine

$$-\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\,dx\,dy\,dz = p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\rho\,dx\,dy\,dz = -\frac{dE}{dt}\,dM\ *),$$

astfel că ecuația, punând pentru energia internă acumulată în masă

$$W = \int E\,dM \quad \text{și deci} \quad \frac{dW}{dt} = \int \frac{dE}{dt}\,dM,\ **)$$

---

*) căci $\frac{\partial}{\partial t}\int f(u)\,du = f(u)\frac{\partial u}{\partial t}$, precum și aici p este funcție exclusivă de $\frac{1}{\rho}$, adică funcție de funcție.

**) De altfel se putea vedea și direct că ultima integrală din (2) reprezintă $\frac{dW}{dt}$, căci p înmulțit cu dilatația cubică în unitatea de timp exprimă energia desvoltată de unitatea de volum în timpul dilatației, iar cu — pe acea absorbită intern în timpul comprimării.

se scrie

$$\frac{d}{dt}\left(T+V+W\right)=\int p\left(lv_x+mv_y+nv_z\right)d\Omega.$$

Rezultă că, la o masă compresibilă fără schimburi de căldură, suma energiei cinetice, a energiei potenţiale (datorite unui câmp de forţă exterioară care admite un potenţial) şi a energiei interne creşte exact cu lucrul mecanic efectuat pe suprafaţa limitativă a masei de către presiunile exterioare, ceeace este conform principiului conservării energiei.

7. Producere instantanee de cantitate de mişcare.

Dacă, la un moment dat, intervin impulsiuni sau ciocniri asupra fluidului sau dacă condiţiunile limite se schimbă brusc, cantităţile de mişcare se pot schimba de asemenea brusc (d. e. atunci când un corp scufundat în fluid se pune brusc în mişcare).

Fie v'_x, v'_y, v'_z, componentele vitesei imediat după ciocnire, F'_x, F'_y, F'_z, componentele impulsiunilor forţelor exterioare de ciocnire (reduse la unitatea de masă) şi p' impulsiunea presiunei de ciocnire în punctul (x, y, z), Variaţia cantităţii de mişcare, paralelă cu axa x, a elementului de masă infinitezimal în timpul foarte scurt τ, când se produce impulsiunea, va fi

$$\rho\, dx\, dy\, dz\,(v'_x - v_x).$$

Cum o forţă de ciocnire se poate considera infinit de mare faţă de celelalte forţe, efectul acestora se poate neglija, scriind, analog cu ecuaţiile mecanice obişnuite după cele trei axe:

$$\begin{aligned} v'_x - v_x &= F'_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{dx} \\ v'_y - v_y &= F'_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{dy} \\ v'_z - v_z &= F'_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{dz}, \end{aligned} \qquad (1)$$

unde însă dimensia tutulor termenilor are ca factor în plus *timpul*.

Şi într'adevăr, dacă folosim notaţiile din acele ecuaţii, vom scrie

$$F'_x=\int_0^\tau F_x\,dt,\quad F'_y=\int_0^\tau F_y\,dt,\quad F'_z=\int_0^\tau F_z\,dt,\quad p'=\int_0^\tau p\,dt$$

unde F şi p ar fi foarte mari, iar τ un timp foarte scurt.

Să considerăm un lichid; în el se pot produce impulsiuni de presiune singure, adică cu $F'_x = F'_y = F'_z = 0$, ecuațiile respective devenind:

$$\begin{aligned} v'_x - v_x &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \\ v'_y - v_y &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{dy} \\ v'_z - v_z &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{dz}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Dacă derivăm aceste ecuații respectiv în raport cu x, y, z, le adunăm și admitem pe ρ constant, găsim, ținând sema de ecuația de continuitate a fluidelor incompresibile,

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0.$$

In fiecare caz special problema constă în a determina pe p', care satisface ultima ecuație, ceeace se poate face atunci când cunoaștem repartiția lui p' pe suprafața ce limitează lichidul, deducându-se apoi variația cantităților de mișcre din ecuațiile (2).

8. Ecuațiile lui Lagrange.

Să considerăm, după metoda lui *Lagrange*, x, y, z ca funcțiuni de y_0, y_0, z_0, t. Componentele vitesei și accelerației sunt derivatele parțiale, de primul și al doilea ordin, ale coordonatelor în raport cu timpul; ultimile componente sunt totodată derivatelele parțiale ale componentelor viteselor față de timp.

Ecuațiile mecanice se pot scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Pentru a elimina derivatele parțiale față de x, y, z, — cari aici nu sunt variabile independente —, și spre a obține un sistem echivalent de 3 ecuații în funcție de x_0, y_0, z_0, t, înmulțim aceste 3 ecuații respectiv cu $\frac{dx}{dx_0}$, $\frac{dy}{dx_0}$, $\frac{dz}{dx_0}$ și adunăm membru cu membru;

apoi le înmulțim cu $\frac{dx}{dy_0}$, $\frac{dy}{dy_0}$, $\frac{dz}{dy_0}$ respectiv, adunând la fel și, în fine, le înmulțim cu $\frac{dx}{dz_0}$, $\frac{dy}{dz_0}$, $\frac{dz}{dz_0}$, adunând deasemenea rezultatul.

In felul acesta se obține sistemul de ecuații:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-F_x\right)\frac{\partial x}{\partial x_0}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}-F_y\right)\frac{\partial y}{\partial x_0}+\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}-F_z\right)\frac{\partial z}{\partial x_0}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_0}=0$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-F_x\right)\frac{\partial x}{\partial y_0}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}-F_y\right)\frac{\partial y}{\partial y_0}+\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}-F_z\right)\frac{\partial z}{\partial y_0}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_0}=0 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-F_x\right)\frac{\partial x}{\partial z_0}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}-F_y\right)\frac{\partial y}{\partial z_0}+\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}-F_z\right)\frac{\partial z}{\partial z_0}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z_0}=0,$$

cari constituesc forma, după *Lagrauge*, a ecuațiilor mecanice.

La aceste ecuații trebue adăugată ecuația de continuitate (analog ca la pag. 46) sub forma

$$\rho D=\rho_0, \qquad (2),$$

unde

$$D=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)},$$

ecuație care, în cazul unui fluid incompresibil, devine

$$D=1. \qquad (2')$$

Ecuațiile (1) și (2), împreună cu ecuația caracteristică, formează un sistem de 5 ecuații ce permit, ținând seama de condițiile la limită, determinarea lui x, y, z, p și ρ ca funcțiuni de variabilele independente x_0, y_0, z_0, și t.

9. Transformarea lui Weber.

In cazul existenței unui potențial de forță, ecuațiile lui *Lagrange* din capitolul precedent se pot scrie:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{\partial v_y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x_0}+\frac{\partial v_z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x_0}=-\frac{\partial U}{\partial x_0}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_0} \quad \text{etc.}$$

Ori, pe de o parte avem

$$\int_0^t \frac{\partial v_x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial x_0}\,dt=\left[v_x\frac{\partial x}{\partial x_0}\right]_0^t-\int_0^t v_x\frac{\partial v_x}{\partial x_0}\,dt$$

$$=v_x\frac{\partial x}{\partial x_0}-v_{x\,0}\,^{*)}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_0}\int_0^t v_x^2\,dt,$$

*) ținând seamă că $\frac{\partial x_0}{\partial x_0}=1$, pe când $\frac{\partial y_0}{\partial x_0}=\frac{\partial z_0}{\partial x_0}=0$

și admițând că $\frac{1}{\rho}$ este funcție de funcția p, în care caz

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int f(p)\,dp = f(p)\,\frac{\partial p}{\partial x_0},$$

rezultă pe de altă parte

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\int\frac{dp}{\rho}$$

integrala fiind luată dela o anumită valoare inițială arbitrară a lui p și deci a lui ρ, până la valoarea actuală din punctul x, y, z.

În fine, punând

$$\chi = \int_0^t \left(\int\frac{dp}{\rho} + U - \frac{1}{2}v^2 \right) dt \qquad (2)$$

sau

$$\frac{d\chi}{dt} = \int\frac{dp}{\rho} + U - \frac{1}{2}v^2, \qquad (2')$$

găsim (Weber), după integrarea primei ecuații *Lagrange* dela 0 la t și apoi a celorlalte două:

$$\begin{aligned}
v_x\frac{\partial x}{\partial x_0} + v_y\frac{\partial y}{\partial x_0} + v_z\frac{\partial z}{\partial x_0} - v_{x_0} &= -\frac{\partial\chi}{\partial x_0}\\
v_x\frac{\partial x}{\partial y_0} + v_y\frac{\partial y}{\partial y_0} + v_z\frac{\partial z}{\partial y_0} - v_{y_0} &= -\frac{\partial\chi}{\partial y_0}\\
v_x\frac{\partial x}{\partial z_0} + v_y\frac{\partial y}{\partial z_0} + v_z\frac{\partial z}{\partial z_0} - v_{z_0} &= -\frac{\partial\chi}{\partial z_0}.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Dacă facem abstracție de ρ, care se poate elimina cu ajutorul ecuației caracteristice, ultimile ecuații (3), împreună cu ecuația (2) sau (2') și cu ecuația de continuitate, constitue un sistem de cinci ecuații cu cinci funcțiuni necunoscute: x, y, z, p, χ, satisfăcând condițiunile inițiale (adică pentru $t = 0$)

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \chi = 0.$$

Înmulțind ecuațiile (3) respectiv cu dx_0, dy_0, dz_0 și adunând, obținem

$$v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz - (v_{x_0}\,dx_0 + v_{y_0}\,dy_0 + v_{z_0}\,dz_0) = -d\chi,$$

ceeace duce la proprietatea importantă — de care ne vom ocupa mai pe larg în Hidrodinamică — că integrabilitatea expresiei $v_{x_0}\,dx_0 + v_{y_0}\,dy_0 + v_{z_0}\,dz_0$, deci la mișcările unde expresia generală $v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$ este, la un moment dat t_0, diferențială exactă, atrage integrabilitatea în orice alt moment posterior sau anterior.

Este de notat că, în locul coordonatelor inițiale x_0, y_0, z_0, putem introduce orice alți trei parametri a, b, c, cari pot servi la identificarea unei molecule, îndeplinind condiția de a varia continuu. Cu această generealizare forma ecuațiilor (2) și (3) nu se schimbă. In ceeace privește ecuația de continuitate, să considerăm particula care are drept caracteristice: a, b, c, și ca poziție inițială x_0, y_0, z_0. Volumul inițial al paralelipipedului elementar cu centrul în x_0, y_0, z_0, și ale cărui muchii corespund cu variațiunile da, db, dc, ale parametrilor a, b, c, este

$$\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)}\, da\, db\, dc\,, \tag{4}$$

astfel că avem

$$\rho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \rho_0 \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)}\,,$$

iar pentru un fluid incompresibil

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)}\,. \tag{5}$$

10. Problema generală a Hidrodinamicei în cazul fluidelor perfecte.

Pentru determinarea celor cinci funcțiuni necunoscute, fie din sistemul lui *Euler* (v_x, v_y, v_z, ρ, p) fie din sistemul lui *Lagrange* (x, y, z, ρ, p), se dispune, precum am văzut, de cinci ecuații.

In cele mai multe cazuri vom presupune că v_x, v_y, v_z sunt funcțiuni continue de x, y, z, și că derivatele lor de primul ordin $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}, \ldots \text{etc}\right)$ sunt finite, fără ca să fie neapărat continue (cum este cazul la mișcarea turbilionară); o asemenea mișcare se poate numi *continuă*. Când se vor prezenta excepțiuni, ele se vor trata în mod special. La o mișcare continuă, definită ca mai sus, punctele infinit de apropiate prezintă diferențe de vitesă infinitezimale, astfel că o mică suprafață închisă care se mișcă cu fluidul va cuprinde mereu aceeași masă.

Funcțiunea pozitivă p este continuă, deoarece derivatele ei parțiale $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\,(F_x - j_x)$ .. etc sunt finite; funcțiunea ρ, esențial-

mente pozitivă, poate fi discontinuă. Se face obstracție în F de-forțele capilare, cari, la suprafața liberă a unui lichid, pot avea valori considerabile.

La integrarea ecuațiilor se va ține seama de două feluri de condițiuni: cele *inițiale* și cele la *limită*. Primele se referă la valorile inițiale ale funcțiunilor într'un moment t_0. In acel moment bunăoară se cunosc pentru ori ce moleculă (x_0, y_0, z_0) a fluidului, cantitățile v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}, p_0, ρ_0, cari astfel constituesc funcțiuni cunoscute de x_0, y_0, z_0.

In ceeace privește *condițiunile la limită*, dacă considerăm un fluid, limitat, d. e. de pereții unui vas sau tub, fix sau mobil, aceste condițiuni ne exprimă că, în atingere cu pereții, moleculele trebuie să aibe vitese tangențiale pereților.

De condițiunile menționate mai sus se ține seamă fie după integrare (în general pentru valorile inițiale), fie chiar la punerea în ecuație a problemei (în general pentru cele la limită) care, prin introducerea lor dela început, se simplifică. Astfel la scurgerea apei printr'o conductă, vitesele se admit chiar de la început ca fiind paralele cu pereții conductei.

Mai observăm în treacăt că, în sistemul coordonatelor și funcțiilor vectoriale, unde un punct în spațiu este determinat de raza vectoare $\bar{r}$ care duce la acel punct, iar vitesa și accelerația sunt date prin vectorii lor, variabilele independente s'ar reduce de la patru la două, iar numărul funcțiilor pentru determinarea stării fluidului s'ar reduce dela cinci la trei. Astfel, în sistemul lui *Lagrange* necunoscutele ar fi: vectorul $\bar{r}$ al poziției actuale a moleculei, p și ρ, toate funcțiuni de $\bar{r}_0$, vectorul poziției inițiale (în t_0), și de t; în sistemul lui *Euler* am avea ca necunoscute: $\bar{v}$, vectorul vitesei, p și ρ, funcțiuni de $\bar{r}$ (vectorul poziției punctului geometric) și de t.

Pe scurt s'ar putea scrie:

$$\bar{v} = \varphi(\bar{r}_0, t) \text{ în sistemul lui } Lagrange.$$

$$\bar{v} = \psi(\bar{r}, t) \text{ în sistemul lui } Euler.$$

Numărul de ecuații s'ar reduce și el dela cinci la trei, căci cele trei ecuații mecanice după trei axe s'ar rezuma într'o singură ecuație vectorială, care împreună cu ecuația fizică și cu ecuația de continuitate ar forma un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, în funcție de două variabile independente.

In cazul particular al echilibrului, — ecuaţia de continuitate dispărând în repaos — atât numărul ecuaţiilor, cât şi acel al funcţiilor necunoscute, se reduce evident dela trei la două: ecuaţia vectorială şi ceea fizică, respectiv funcţiile p şi ρ (v fiind nul).

Această simplificare este însă pur formală, deoarece în analiză cunoaşterea unui vector implică cunoaşterea a trei elemente, d. e. a proecţiunilor lui pe trei axe.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

HIDROSTATICA.

CAP. III.

TEORIA GENERALĂ A HIDROSTATICEI.

1. Ecuaţia mecanică fundamentală.

Ecuaţiile (1) din capitolul precedent devin în cazul echilibrului sau repaosului:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

In hidrostatică variabilele lui *Lagrange* şi ale lui *Euler* se confundă, deoarece noţiunea timpului dispare, rămânând numai trei variabile independente: x, y şi z. Ecuaţiile de mai sus exprimă echilibrarea mutuală, asupra oricărei molecule, a rezultantei forţelor exterioare masice cu rezultanta elastică, ambele reduse la unitatea de masă. Eforturile tangenţiale τ nu intervin nici chiar pentru un fluid viscos, ele fiind nule în repaos.

Aceste ecuaţii dau legea de repartiţie a valorilor funcţiunii p după trei direcţiuni dreptunghiulare şi deci în întreaga masă. Inmulţite respectiv cu dx, dy, dz şi adunate membru cu membru, ele dau variaţia lui p pentru o strămutare spaţială ds, având ca proecţii dx, dy, dz:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}\,ds. \qquad (1)$$

Această ecuaţie arată că expresia din primul membru a lucrului virtual $F\,ds\cos \sphericalangle (F\,ds)$, efectuat de rezultanta exterioară la o deplasare ds a masei unitare, este egală şi de semn contrar cu expresia lucrului virtual $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}\,ds$ al rezultantei elastice, ceeace pentru echilibru este evident necesar.

Ecuaţia (1) conţine drept cazuri particulare ecuaţiile din cari s'a dedus, d. e. cu $dx = ds$, $dy = 0$, $dz = 0$, pe prima.

2. Condiţionarea echilibrului de natura câmpului forţei exterioare.

Cum dp este diferenţiala exactă a unei funcţiuni uniforme, (p admiţând o singură valoare într'un punct al fluidului în echilibru), urmează ca şi primul membru al ecuaţiei (1), înmulţit cu ρ, să fie diferenţiala exactă a unei fracţiuni uniforme de x, y, z.

Trebue deci, înainte de toate, ca forţa unităţii de masă, sau intensitatea F a câmpului exterior, să satisfacă următoarele condiţii, fără de care echilibrul nu e posibil:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho F_x)}{\partial y} &= \frac{\partial(\rho F_y)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho F_y)}{\partial z} &= \frac{\partial(\rho F_z)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho F_z)}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho F_x)}{\partial z}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Factorul integrant ρ este în general funcţie de presiune şi temperatură — după ecuaţia fizică — iar la fenomenele izoterme numai de presiune. Putem considera două cazuri:

a) cazul lichidelor cu ρ aproximativ constant şi

b) cazul gazelor perfecte sub temperatură constantă sau în transformare adiabatică sau izotropică cu $\rho = f(p)$,

primul putând fi privit ca un caz particular al celui de al doilea.

In ambele cazuri, ρ fiind constant sau funcţiune uniformă de p, membrul întâiu al ecuaţiei (1) va trebui să fie, ca şi cel de al doilea, o diferenţială exactă a unei funcţiuni uniforme $f(x, y, z)$.

Condiţiunile (2) se reduc deci la:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\,;\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}\,;\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \qquad (3)$$

Așa dar, *componentele intensității câmpului vor trebui să fie derivatele unei funcții* $f(x, y, z)$ *uniforme în tot spațiul ocupat de fluid;* cu alte cuvinte câmpul F va trebui să derive din o funcție de forță, cu interpretarea de mai jos, pe care acest fapt analitic o comportă în mecanică. Această restricție, impusă naturii câmpului exterior, fiind presupusă îndeplinită, să facem deocamdată abstracție de prezența fluidului și să privim pe dx, dy, dz ca proecțiile unei deplasări elementare a unității de masă, presupusă liberă în spațiu. Expresia lucrului elementar al câmpului asupra masei unitare

$$d\mathfrak{T} = F\,ds\cos \sphericalangle (F\,ds) = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

fiind o diferențială exactă, pentru deplasarea masei unitare dela punctul *1* la punctul *2* vom avea

$$\int_1^2 d\mathfrak{T} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1),$$

prin urmare lucrul efectuat de câmp în această deplasare va depinde numai de poziția inițială și finală a masei, iar nu și de drumul parcurs. La revenirea de la *2* la *1*, iarăși pe orice drum, lucrul efectuat va fi egal și de sens contrar.

Funcția de forță cu semn schimbat $-f(x, y, z) = U$, care descrește cu lucrul pozitiv transmis de câmp asupra masei unitare și viceversa, constitue *potențialul* câmpului. Conform acestei definiții potențialul poate fi interpretat ca o rezervă de energie a câmpului, grație căreia, în timpul deplasării masei unitare, se petrec între aceasta și câmp schimburi de energie.

Dacă $\overline{F}$ este o forță centrală, d. e. newtoniană, cum e bunăoară gravitatea, ea comportă o funcție de forță sau un potențial, astfel că, în câmpul gravității echilibrul lichidelor și gazelor este realizabil.

Rezumând, echilibrul cere îndeplinirea unor prime condiții, cari se pot exprima în unul din următoarele moduri, echivalente între ele:

a) *Analitic*: expresia lucrului elementar

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

să fie integrabilă, sau F_x, F_y, F_z, să fie derivatele unei funcții uniforme $f(x, y, z)$, ceeace implică relațiile (3).

b) *Mecanic*: lucrul efectuat de câmpul $\overline{F}$ asupra masei unitare mobile să nu depindă decât de pozițiile ei inițială și finală,

adică $\overline{F}$ să admită o funcție de forță $f(x, y, z)$ sau un potențial $U = -f(x, y, z)$, astfel ca

$$dU = -df = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz).$$

Un asemenea câmp se numește *conservativ*, cu aluzie la faptul că energia, transmisă unei mase prin forțele câmpului în timpul unei deplasări, trebue, pentru revenirea masei în poziția inițială, restituită acestuia în întregime și viceversa.

3. Potențialul în cazul unui câmp newtonian.

Să considerăm două mase elementare A și B, care exercită una asupra alteia o forță mutuală *atractivă* ce ascultă de legea lui *Newton*, fiind deci proporțională cu masele și invers proporțională cu pătratul distanței, iar ca direcție având dreapta ce unește centrele celor două mase.

Alegând unitățile astfel încât coeficientul C din expresia generală a forței mutuale $C\frac{mm'}{r^2}$ să fie 1, vom avea o forță $\frac{mm'}{r^2}$, care se exercită de A asupa lui B, și o altă forță egală și de sens contrar, care se exercită de B asupra lui A (Fig. 16).

Forțele acestea sunt pentru sistemul m, m' interne; putem privi însă una din mase, d. e. pe m, separat, și, pentru această, masă, forța ce o solicită va fi o forță exterioară.

Să considerăm pe m și m' ca esențialmente pozitive. Dacă în intervalul dt masele s'au deplasat în A' și B', proecțiunile Aa și Bb a drumurilor parcurse pe direcția forțelor fiind luate cu semnul cuvenit, lucrurile mecanice efectuate de forța aplicată asupra lui A și de aceea aplicată lui B vor fi respectiv

$$\frac{mm'}{r^2}Aa \quad \text{și} \quad \frac{mm'}{r^2}Bb.$$

Fiind vorba de deplasări infinitezimale, se poate considera AB paralel cu $A'B'$ și $ab = A'B'$, astfel că suma drumurilor parcurse în direcția forțelor va fi în mărime și semn $-dr$.

Rezultă că, în cazul *atracțiunii*, lucrul total al celor două forțe interne ale sistemului este

$$-\frac{mm'}{r^2}dr = d\frac{mm'}{r}.$$

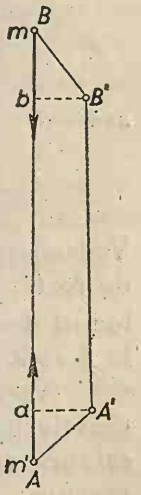


Fig. 16

Este evident că, dacă masa m' ar fi fixă și numai m s'ar mișca, expresia de mai sus ar indica numai lucrul uneia din forțe, ceea aplicată lui m, adică lucrul transmis lui m. Privind pe m izolat, forța aceasta îi este exterioară, emanând din restul sistemului, redus aici la masa m'.

Să considerăm același punct material mobil m și un sistem de mase atractive fixe $m_1, m_2, m_3, \ldots$, cum este cazul ce ne ocupă în genere al gravitației, unde sistemul $m_1, m_2, m_3, \ldots$, formează pământul, iar m masa unei molecule fluide, egală cu unitatea. Forțele atractive ce solicită pe $m = 1$ sunt:

$$\frac{m_1}{r_1^2}, \frac{m_2}{r_2^2}, \frac{m_3}{r_3^2}, \ldots \frac{m_n}{r_n^2},$$

având o rezultantă $\overline{F}$, care reprezintă intensitatea câmpului dat de sistemul $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$, sau acceleratia imprimată de forțele câmpului unei mase m oarecare (Fig. 17).

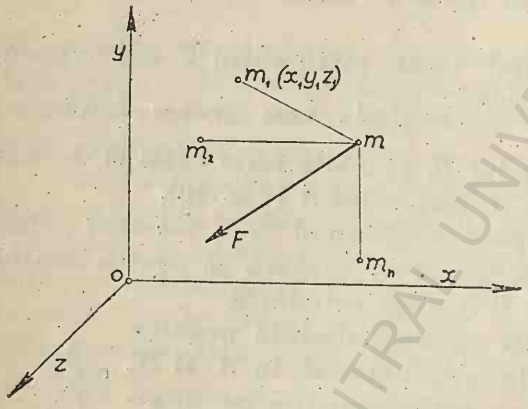


Fig. 17

La o deplasare elementară a masei $m = 1$, lucrul $d\mathfrak{T}$ efectuat de forța $\overline{F}$ asupra ei va fi

$$d\sum_1^n \frac{m_i}{r_i} = d f(x, y, z),$$

$r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ fiind funcțiuni de cordonatele x, y, z ale moleculei, și deci avem

$$d\mathfrak{T} = d f(x, y, z)$$

sau

$$\mathfrak{T}_1^2 = f(x_2\, y_2\, z_2) - f(x_1\, y_1\, z_1).$$

Vedem, așa dar, că în cazul forțelor newtoniene *există* o funcțiune de forță, dată cu aproximația unei constante arbitrare, astfel că lucrul desvoltat de $\overline{F}$ asupra masei mobile m în deplasarea dela 1 la 2 este independent de drumul parcurs.

Acest lucru $\mathfrak{T}$, când este pozitiv (d. e. m coboară în câmpul gravitațiunei terestre) poate, întru cât nu s'ar transforma în căldură prin frecare, ciocnire, etc, să servească la diferite efecte, precum: să mărească energia cinetică a masei m sau (transmițându-se parțial sau total asupra altor mase cu cari m vine în

atingere, prin intermediul forțelor mutuale de contact) să producă lucru mecanic, cum este cazul apei care, în căderea ei, poate mișca o turbină.

In aceleași împrejurări, la trecerea inversă dela poziția 2 la 1 se sustrage masei de către câmp o cantitate de energie egală cu $\mathfrak{T}$, fie din energia ei proprie, fie din aceea ce i s'ar transmite concomitent dintr'un alt sistem (d. e prin paletele unei pompe acționată de un motor), cantitate pe care masa o va putea redobândi la o nouă deplasare dela 1 la 2. De aci interpretarea sus-menționată de a privi acest cvantum de energie, absorbit (utilizat) de masa m în mișcarea sa dela 1 la 2 și părăsit (restituit) în mișcarea inversă dela 2 la 1, ca existând în câmp în stare potențială la dispoziția masei m atunci când aceasta ocupă poziția 1, cu posibilitatea, la timpul oportun, de a se deplasa la 2, utilizând efectiv energia în chestiune.

Tocmai această interpetare a condus la denumirea de *potențial* a rezervei de energie U, presupusă înmagazinată în câmp la dispoziția masei $m = 1$ și definită prin relația:

$$d\mathfrak{T} = -dU$$

$$\mathfrak{T}_{12} = -(U_2 - U_1) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

cu aproximația unei constante, ca și funcția de forță, întru cât numai variațiile ei ne interesează.

Masa $m = 1$ primește energie din câmp, de câte ori $d\mathfrak{T}$ este pozitiv, adică potențialul descrește. Pentru $m \neq 1$ lucrul și energia potențială sunt de m ori mai mari, ultima fiind mU. Pentru mai multe mase m, energia potențială totală are expresia ΣmU. Energia căderilor de apă se desvoltă, putând fi utilizată, la trecerea apei dela o poziție cu potențial mai mare la o poziție cu potențial mai mic.

Notă. In cazul gravitațiunii (mecanica atracțiunilor), solicitând o masă oarecare m, funcția de forță, dacă alegem unitățile astfel ca să avem $C = 1$, este $m\Sigma\frac{m_i}{r_i}$ (expresie pozitivă căci și masele m_i au fost considerate pozitive). Pentru $m = 1$ funcția de forță devine $\Sigma\frac{m_i}{r_i}$ iar potențialul $-\Sigma\frac{m_i}{r_i}$.

Totuși în mod impropriu $\Sigma\frac{m_i}{r_i}$ se numește uneori și *funcțiune potențială*, deși este de sens invers cu potențialul; această denumire este împrumutată dela Electricitate și Magnetism, unde însă ea este justificată. Intradevăr, acolo funcțiunea de forță este exprimată prin $-m\Sigma\frac{m_i}{ri}$ din următoarele motive; pe când masa

unitară m se consideră ca şi mai sus pozitivă, masele electrice şi magnetice m_l, cari formează câmpul, se iau cu semn contrar celui definit mai sus pentru masele gravitaţionale, fiind anume pozitive în cazul *replusiunii* (mase de acelaşi semn cu m) şi negative în cazul atracţiunii (mase de semn contrar). Funcţiunea potenţială, definită ca $\sum \frac{m_l}{r_l}$, coincide atunci cu potenţialul, iar nu cu funcţia de forţă.

4. Propietăţile suprafeţelor echipotenţiale, atât în câmp liber cât şi prin o masă fluidă.

Prin chiar definiţiunea potenţialului U, derivatele lui în raport cu x, y, z, luate cu semn schimbat, exprimă proecţiile F_x, F_y, F_z ale forţei $\overline{F}$ a câmpului. Aceasta se mai vede şi din faptul că, la o deplasare dx (virtuală sau reală) a lui m, lucrul mecanic se poate exprima sub dubla formă: $F_x\,dx$ (deplasarea înmulţită cu proecţia forţei pe direcţia ei) şi $-\frac{\partial U}{\partial x}\,dx$ (variaţia potenţialului cu semn schimbat, pentru creşterea dx a abscisei).

Punctele din spaţiu, cari au acelaşi potenţial, formează suprafeţe zise *echipotenţiale*, cari au următoarele proprietăţi:

1) Forţa $\overline{F}$ le este *normală*, deoarece pentru orice deplasare ds în o asemenea suprafaţă lucrul ($d\mathfrak{T} = -dU$) este nul, deci drumul ds perpendicular pe forţă.

Suprafeţele echipotenţiale şi *liniile de forţă* (învăluitoarele lui $\overline{F}$, cari sunt ortogonalele acelor suprafeţe) dau o imagine geometrică a câmpului scalar U şi a câmpului vectorial $\overline{F}$.

2) Sensul forţei $\overline{F}$ este acela în care potenţialul descreşte, fiindcă numai la o deplasare în acest sens forţa exercită un lucru ($d\mathfrak{T} = -dU$) pozitiv.

3) Două suprafeţe echipotenţiale U_1 şi U_2 nu se pot tăia, fiindcă în punctele de întretăere am avea două potenţiale diferite şi două direcţiuni de forţă diferite.

In cazul gravitaţii, intensitatea $\overline{F} = \overline{g}$ din câmpul restrâns, în care studiem fenomenele în practică, poate fi considerată constantă, potenţialul obţinut prin integrare fiind

$$U = -(g_x x + g_y y + g_z z) + C.$$

Dând lui U diferite valori, obţinem ecuaţia suprafeţelor echipotenţiale, cari în cazul de faţă sunt planuri paralele, cărora forţa $\overline{F} = \overline{g}$ le este normală, deci sunt planuri orizontale. Dacă luăm axa z verticală ascendentă ($\overline{F} = -\overline{g}$), ecuaţia se simplifică:

$$U = gz + C$$

şi se vede că potenţialul unităţii de masă este dat, cu aproximaţia unei constante arbitrare, de gz, iar potenţialul unităţii de greutate, a cărei masă este $\frac{1}{g}$, de altitudinea z faţă de planul de referinţă.

Dacă 1 kg de apă cade cu $z_1 - z_2$ metri, energia desvoltată de gravitaţie va fi de $z_1 - z_2$ kilogrammetri.

In prezenţa unui fluid în repaos suprafeţele echipotenţiale mai au următoarele proprietăţi:

1° Din ecuaţia generală

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\,dU = \frac{dp}{\rho}$$

a echilibrului unui fluid aflător în câmpul sistemului cu intensitatea $\overline{F}$, rezultă că, ori care ar fi ρ, *pe o suprafaţă echipotenţială într'un fluid în echilibru presiunea este aceeaşi*, adică suprafaţa va fi totodată o suprafaţă *izobară* — de egală presiune — sau, cum se obişnueşte a se numi, o *suprafaţă de nivel* (analog cu suprafaţa liberă a lichidelor, unde presiunea este nulă în vid, sau egală cu presiunea gazului în care s'ar găsi).

Intr'adevăr este evident că, dacă $dU = 0$, avem şi $dp = 0$.

2° De aici rezultă şi constanţa lui ρ pe o asemenea suprafaţă.

Intradevăr, dacă dela punctele unei suprafeţe izobare trecem, în direcţia normală, la punctele unei alte suprafeţe izobare infinit vecine, adică diferind cu dU, cum la perechea de puncte vecine de pe orice normală va exista şi aceeaşi diferenţă dp între presiunile respective, raportul $-\frac{dp}{dU} = \rho$ va fi acelaşi. Astfel, într'un gaz n repaos densităţile vor varia cu necesitate numai dela o suprafaţă echipotenţială la altă.

3° Pe o suprafaţă echipotenţială într'un fluid în echilibru densitatea şi presiunea fiind constante, din ecuaţia fizică rezultă că şi temperatura va fi constantă; suprafeţele echipotenţiale vor fi deci şi *izoferme*.

Aşa dar, nu poate exista echilibru într'o coloană de aer, decât dacă temperatura şi presiunea sunt şi rămân constante în orice plan orizontal.

4° Suprafaţa de separaţie între două lichide de densităţi diferite trebue să fie o suprafaţă echipotenţială, căci altfel ea ar tăia suprafeţe echipotenţiale, pe cari am avea densităţi diferite de o parte şi de alta a intersecţiei.

Raţionamentul se poate aplica şi la suprafaţa de separaţie între un lichid şi un gaz.

Demonstraţia se poate face şi astfel: presiunea fiind o funcţie continuă, rezultă că, într'un punct oarecare al suprafeţei de separaţie, ea va fi aceeaşi pe ambele feţe ale particulelor din suprafaţa de separaţie. Trecând separat prin masa fiecăruia din lichide (Fig. 18) dela punctul A la altul B tangenţial suprafeţei de separaţie, variaţia presiunii în primul lichid: $dp = -\rho\, dU$ va fi egală cu variaţia presiunii în al doilea: $dp = -\rho_1\, dU$, ceeace dă $(\rho - \rho_1)dU = 0$, conducând la $dU = 0$, căci ρ şi ρ_1 au fost presupuse diferite.

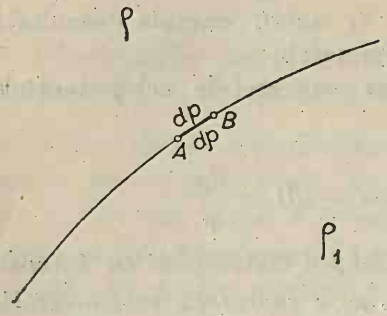


Fig. 18

5. Legea hidrostatică.

Ecuaţia mecanică de echilibru a fluidelor, perfecte sau viscoase, în ipoteza existenţei unui potenţial al forţei exterioare $\overline{F}$

$$-dU = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz,$$

devine, precum am văzut,

$$-dU = \frac{dp}{\rho}.$$

Această ecuaţie, integrată, dă *ecuaţia de repartiţie a presiunii hidrostatice* sau, mai pe scurt, *legea hidrostatică*.

Sub forma diferenţială ea arată că, ρ fiind esenţialmente pozitiv, presiunea creşte totdeauna în sensul descreşterii potenţialului, adică în sensul forţei exterioare $\overline{F}$.

In cazul gravitaţiei, $\overline{F} = \overline{g}$ fiind vertical şi îndreptat în jos, rezultă că p creşte întotdeauna cu adâncimea.

6. Echilibrul unei mase fluide, izolată în spaţiu; câmp radial.

Să considerăm echilibrul unei mase fluide, izolată în spaţiu ale cărei molecule se atrag după legea lui *Newton*. In echilibru suprafeţele echipotenţiale, pe cari rezultanta atracţiunii este

normală, vor fi, după cum am văzut, suprafeţe izobare sau de nivel — printre cari şi suprafaţa liberă —, precum şi suprafeţe de egală densitate.

Un exemplu de această natură ar fi sfera pământească, presupusă lichidă, în repaos absolut şi sustrasă acţiunii oricărui alt câmp de forţă exterioară, decât acela al maselor proprii.

Intradevăr sfera, fie plină fie goală, îndeplineşte condiţiunile de mai sus, dacă densitatea ei este constantă sau funcţie de depărtarea de centru, adică constantă pe orice suprafaţă concentrică. Este destul a ne gândi că, din motive de simetrie, suprafeţele echipotenţiale vor fi în acest caz sfere concentrice, iar forţa câmpului îndreptată spre centru, deci normală pe aceste suprafeţe. Rezultă că, o astfel de sferă este o figură lichidă de echilibru.

Se ştie din teoria potenţialului newtonian că:

a) pentru un punct exterior, acţiunea sferei este aceeaşi ca şi când am presupune toată masa concentrată în centrul ei

b) o sferă goală nu exercită în interiorul ei nici o acţiune.

Aşa dar, la o sferă plină, acţiunea ei asupra unui punct interior se reduce la aceea a unei sfere concentrice, mărginită la punctul considerat.

Dacă luăm o moleculă de masă $m = 1$ în interiorul unei sfere pline la distanţa r de centru, vom avea pentru orice direcţie trecând prin centru

$$0 = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

sau, fiindcă p este funcţie numai de r,

$$0 = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} \text{ sau } F_r = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}, \qquad (1)$$

unde, după ceeace s'a spus mai sus, F_r este atracţia datorită numai sferei concentrice mărginită la moleculă.

Dacă luăm sensul pozitiv dela centru spre periferie, adică sensul creşterei lui r, avem după legea lui *Newton*:

$$F_r = -C\frac{M_r}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi C r \rho_m,$$

M_r fiind masa sferei de rază r în ipoteza că ρ_m ar fi constant (egal cu valoarea medie a densităţii), cum s'ar putea admite riguros numai în cazul unui lichid incompresibil.

Putem elimina pe C în cazul când cunoaştem o valoare particulară a lui F_r, d. e. aceea dela periferie.

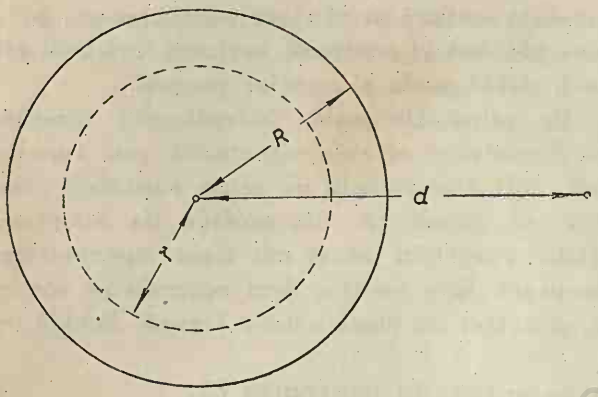


Fig. 19

In cazul pământului, presupus lichid, (Fig. 19) avem la periferie

$$F_R = -g = -\frac{4}{3}\pi C R \rho_m$$

astfel că, înlocuind mai sus pe $\frac{4}{3}\pi C\rho_m$ cu $\frac{g}{R}$, obţinem expresia atracţiei pentru un punct interior

$$F_r = -g\frac{r}{R}.$$

Pentru un punct exterior la distanţa d obţinem prin proporţionalitatea inversă cu pătratul distanţei

$$F_d = -g\frac{R^2}{d^2}.$$

Ambele aceste expresiuni pentru $r = d = R$ dau $F_r = F_d = -g$. Punând în (1) expresia lui F_r, obţinem legea hidrostatică aproximativă (întru cât s'a considerat ρ constant):

$$\frac{1}{\rho_m}\frac{dp}{dr} = -\frac{g}{R}r$$

$$dp = -\frac{\rho_m g}{R} r\,dr = -\frac{\varpi_m}{R} r\,dr$$

$$p - p_a = \frac{1}{2}\frac{\varpi_m}{R}(R^2 - r^2),$$

unde p_a este presiunea atmosferică la suprafaţă, p presiunea la o adâncime $R - r = h$, iar ϖ_m greutatea specifică medie a pământului.

Această ecuaţie ne dă repartiţia presiunilor cari ar exista în interiorul pământului, privit ca o masă lichidă incompresibilă şi perfect sferică.

Pentru r foarte aproape de R, cum ar fi pentru puncte din marea şi lacurile cari acoperă o parte din suprafaţa pământului, relaţia de mai sus s'ar reduce, în aceleaşi ipoteze, la

$$p - p_a = \varpi(R - r) = \varpi h,$$

unde $R - r = h$ este diferenţa de nivel. In acest fel cădem peste ecuaţia pe care o vom stabili în cazul unui câmp uniform $\bar{g}$.

Suprapresiunea din centru faţă de presiunea atmosferică ar fi, după penultima relaţie, în care am introduce greutatea medie a pământului, presupusă uniform repartizată,

$$p_o - p_a = \frac{1}{2}\varpi_m R = \frac{1}{2}\, 5580\ kg/m^3 \,.\, 6370000\ m = 1{,}777.10^6\ kg/cm^2$$

sau aproximativ un număr de circa *1700000 atmosfere*, având în vedere ca $1\ atm = 1{,}0334\ kg/cm^2$.

Acest calcul aproximativ arată că presiunea în centru are în ori ce caz o valoare enormă şi că ipoteza unei omogeneităţi a masei se îndepărtează mult de adevăr, în realitate ρ sau ϖ trebuind să crească considerabil în spre centru prin compresiune; aceasta mai rezultă şi din mica greutate specifică a pojghiţei pământului faţă de valoarea medie de $5580\ kg/m^3$ pentru întreg pământul.

Să considerăm acum o sferă formată din mai multe lichide cu densităţi sau greutăţi specifice diferite.

Dacă moleculele de aceeaşi densitate sunt dispuse în straturi concentrice, echilibrul este posibil pentru aceleaşi motive de simetrie ca mai sus.

Fie d. e. două lichide incompresibile. Să presupunem că:

a) lichidul mai greu ar forma miezul;

b) acest lichid ar forma coaja.

La suprafaţă vom avea evident în ambele cazuri acelaşi F_R.

In interiorul miezului format de o sferă omogenă, avem

$$F_r = -\frac{4}{3}\pi C r \rho\,,$$

funcţie liniară de r cu un factor ρ, specific lichidului.

La periferia miezului vom avea în cazul *a* (fig. 20)

$$F_{R_1} = -\frac{4}{3}\pi C R_1 \rho_1 \qquad a)$$

şi în cazul *b*

$$F_{R_2} = -\frac{4}{3}\pi C R_2 \rho_2\,, \qquad b)$$

iar în coajă, respectiv

$$F_r = -\frac{4}{3}\pi C \rho_2 r - \frac{4}{3}\pi C(\rho_1 - \rho_2)\frac{R_1^3}{r^2} \qquad a')$$

şi

$$F_r = -\frac{4}{3}\pi C \rho_1 r - \frac{4}{3}\pi C(\rho_2 - \rho_1)\frac{R_2^3}{r^2}. \qquad b')$$

Vom avea, prin urmare, pentru F_r diagrama respectivă din fig. 20 în care, plecând din centrul O, avem în ambele cazuri o dreaptă urmată de o curbă de gradul al treilea.

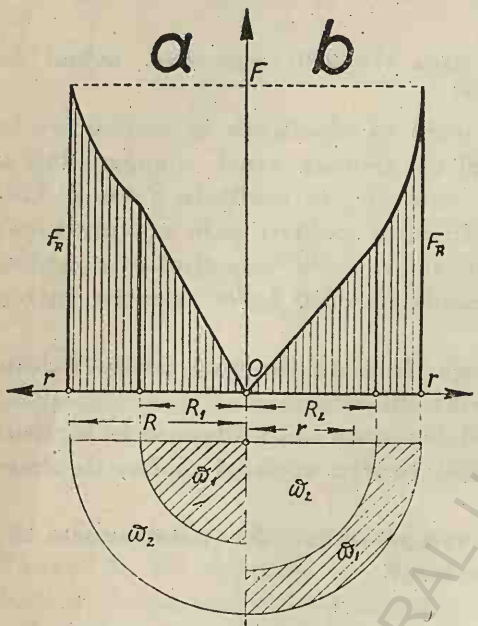


Fig. 20 *a*) ipoteza stabilă
b) „ nestabilă

Suprafaţa diagramei haşurată vertical, luată cu +, dă pentru un r oarecare expresia $-\int_0^r F_r\,dr$ sau potenţialul U al masei unitare în câmpul atracţiunii, dacă luăm la centru $U_0 = 0$ *). Variaţia potenţialului $U - U_0 = U$ reprezintă lucrul necesar ce din exterior trebue comunicat masei unitare, pentru a învinge forţa câmpului în deplasarea dela centru la distanţa r. In ceeace priveşte energia potenţială a întregului sistem, a cărei expresie este, după cum se ştie din Mecanică, $\int_0^R U\,dm$, reprezentând energia cinetică ce s'ar desvolta, dacă toate masele, cedând forţelor câmpului, s'ar putea transporta la centru (făcând abstracţie de impenetrabilitatea materiei), este uşor de

*) Valoarea potenţialului se dă cu aproximaţia unei constante arbitrare, astfel că putem atribui unui punct oarecare, d. e. în cazul de faţă centrului, o valoare arbitrară. Este natural de a se da aci lui U_0 valoarea zero, deoarece potenţialul este minim la centru şi nu avem interes a-i atribui o valoare mai mică sau mai mare ca zero. La o sferă omogenă potenţialul creşte dela centru în spre exterior, fiind la periferie $\frac{2}{3}\pi C\rho R^2$ iar la infinit $2\pi C\rho R^2$.

Dacă s'ar lua pentru potenţial expresia $-\Sigma C\frac{m_i}{r_i}$, valoarea la infinit ar fi nulă iar aceea ce rezultă la centru pentru o sferă omogenă ar fi $-2\pi C\rho R^2$. Potenţialul în acest caz ar fi permanent negativ, crescând (descrescând în valoare absolută) dela centru la infinit, unde sa'ranula. In toate cazurile diferenţa de potenţial între infinit şi centru este $2\pi C\rho R^2$.

arătat că, pentru figura schițată la stânga această energie este mai mică decât pentru figura din dreapta.

Intradevăr, dacă plecăm dela figura din dreapta, cu densitatea mai mare ρ_1 la coajă, putem imagina că se poate ajunge la ceea din stânga, lăsând să se deplaseze spre miez, sub acțiunea forțelor câmpului, o masă ipotetică cu densitatea $\rho_1 - \rho_2$, ce ocupa volumul stratului exterior, ceeace ar comunica acelei mase o anumită energie cinetică, împrumutată din energia potențială a sistemului.

Figura cu densitatea mai mare la coajă prezintă, așa dar, un exces de energie potențială, care la cea mai mică turburare va provoca o mișcare a maselor mai grele dela periferie spre centru. Ea este mai puțin stabilă ca figura din stânga, care are o energie potențială mai mică. Din Mecanică se știe că maximul de stabilitate corespunde cu minimul posibil al energiei potențiale.

Rezultă că, în cazul a două sau mai multe lichide, de densități diferite, ele se vor dispune în straturi concentrice după densități crescânde spre centru, deoarece echilibrul nestabil nu se realizează în natură. A fortiori, o sferă goală, formată dintr'o coajă fluidă, nu se poate menține în stare statică, fiind foarte nestabilă.

Diagrama se poate completa și cu trasarea curbei pentru F_d din exteriorul sferei, care în toate cazurile este o curbă iperbolică de gradul al 3-lea, asimptotă la axele diagramei (Fig. 21):

$$F_d = \frac{k}{d^2}$$

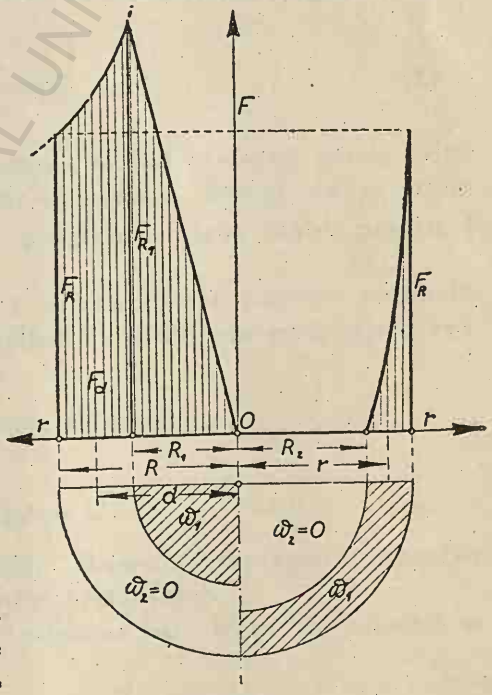


Fig. 21

In fine, echilibrul nu este realizabil în o figură fluidă nesferică; intradevăr, răspândirea în straturi concentrice a părților ieșinde ar produce o apropiere a moleculelor de centru și deci energie cinetică, grație lucrului desvoltat de gravitație; aceasta arată că forma inițială nu avea potențialul minim, fiind deci nestabilă.

Concluzia este că, *pentru o masă fluidă liberă în spațiu, forma sferică, cu dispunerea densităților după straturi concentrice cu densități crescânde spre centru, este singura formă de echilibru stabil.*

Când raza sferei este relativ foarte mare, precum e cazul pământului, față de un spațiu redus considerat lângă sol, suprafețele echipotențiale se pot înlocui prin planuri paralele tangente acelor suprafețe; în acest caz (cel mai interesant în practică) forța $\overline{F}$, normală pe ele, se poate considera constantă — câmp uniform — și egală cu $\overline{g}$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. IV

ECHILIBRUL LICHIDELOR IN CÂMPUL GRAVITAȚIUNII, PRESUPUS UNIFORM.

1. Presiuni în masa unui lichid.

In cazul lichidelor, ρ fiind privit constant, integrarea ecuației diferențiale

$$dU + \frac{dp}{\rho} = 0$$

conduce la legea hidrostatică

$$U + \frac{p}{\rho} = C. \qquad (1)$$

Să considerăm un lichid, supus numai atracției pământului ca forță exterioară masică, într'un spațiu destul de restrâns pentru a se putea admite $\bar{g}$ constant. Este cazul practicei curente.

Să luăm trei axe: x și y orizontale și axa $+z$ verticală ascendentă. Forța exterioară, aplicată unității de masă, are drept componente după cele trei axe:

$$F_x = 0\,,\ F_y = 0\,,\ F_z = -g\,,$$

astfel că

$$U = gz + C\,.$$

Pentru U egal cu o constantă, formula reprezintă ecuația suprafețelor echipotențiale (planuri orizontale).

Inlocuind în (1) pe U prin valoarea lui, legea hidrostatică a lichidelor devine

$$gz + \frac{p}{\rho} = C^{te} \text{ sau } z + \frac{p}{\varpi} = C^{te}.$$

Între două puncte A şi B (Fig. 22) avem

$$z_B + \frac{p_B}{\varpi} = z_A + \frac{p_A}{\varpi} \qquad (1')$$

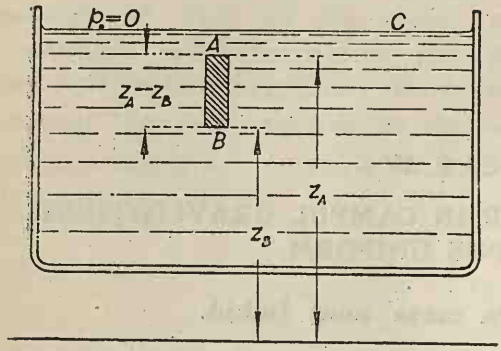


Fig. 22

sau

$$p_B - p_A = \varpi (z_A - z_B), \qquad (2)$$

ceeace exprimă că: *diferenţa de presiune pe unităţea de suprafaţă, între două puncte ale unei mase lichide continue, este egală cu greutatea unei coloane din acel lichid, având ca bază unităţea de suprafaţă, iar ca înălţime diferenţa de altitudine a punctelor.*

Când $p_B = p_A$, avem şi $z_B = z_A$ şi viceversa; aşa dar, regăsim ceeace se putea deduce şi din proprietăţile descrise ale suprafeţelor echipotenţiale, anume că punctele de egală presiune sunt dispuse pe planuri orizontale, iar când există suprafaţă liberă (unde lichidul s'ar mărgini cu vidul, cu atmosfera sau cu alt mediu gazos, fiind astfel supus la o presiune constantă) ea nu poate fi decât un plan orizontal.

Pentru acelaşi motiv nivelele libere a două sau mai multe vase, pline cu acelaşi lichid şi în comunicaţie între ele, se vor găsi în acelaşi plan orizontal (principiul *vaselor comunicante*).

Ecuaţia sub forma geometrică (1') arată că, *în cazul echilibrului, dacă deasupra oricărui punct de ordonată z se ia vertical o înălţime* $h = \frac{p}{\varpi}$, *se ajunge la acelaşi plan orizontal, numit plan de sarcină sau piezometric.*

Înălţimea h se numeşte *sarcină sau înălţime piezometrică* (măsurând presiune = πίεσις) sau *reprezentativă a presiunii în lichidul consideraţ* (cu greutatea specifică ϖ*), presiunea fiind egală cu greutatea unei coloane de lichid de înălţime h.

Dacă avem o suprafaţă liberă, mărginită cu vidul ($p=0$), ea va coincide cu planul de sarcină.

Viceversa, dacă lichidul are puncte de presiune nulă ($p = 0$), adică aşezate în planul de sarcină, aceasta va fi o suprafaţă liberă

*) Pentru aceeaşi presiune şi lichide diferite h este invers proporţional cu greutatea specifică ϖ a lichidului, în care se ia coloana.

mărginită cu vidul; întradevăr, cum presiunile descresc de jos în sus, dacă şi deasupra planului de sarcină ar fi lichid, am găsi presiuni negative, ceeace nu se poate.

Comparând presiunile din două puncte oarecare ale unei mase lichide continue, putem distinge, din punct de vedere practic, următoarele trei cazuri:

a) *Lichid cu suprafaţă liberă* $z = z_0$ *în vid* (Fig. 22). Presiunea p_0 fiind nulă în orice punct C al suprafeţei libere, care coincide cu planul de sarcină, avem pentru orice punct B cu ordonata z_B conform egalităţii (2)

$$p_B = \varpi (z_0 - z_B) .$$

Invers, dacă există o asemenea relaţie între ordonatele z_0, z_B a două puncte şi presiunea p_B din cel de al doilea punct, presiunea p_0 din primul va fi nulă, şi acesta se va afla pe o suprafaţă liberă în vid.

Considerând o coloană cilindrică verticală, limitată între suprafaţa liberă şi baza ei dreaptă în B, de arie egală cu unitatea, singurele forţe aplicate în sens vertical pe coloană vor fi, presiunea pe baza din B, egală cu p_B şi îndreptată în sus, şi greutatea coloanei De aceea se poate spune, că presiunea p_B din B este echilibrată de greutatea coloanei, sau că se datoreşte efectiv greutăţii coloanei de lichid ce apasă asupra ariei unitare, având ca înălţime $z_0 - z_B = h_B$ (înălţimea piezometrică din B).

b) *Lichid sub presiune (lichid forţat)*, adică fără suprafaţă liberă. Este cazul d. e. când lichidul dintr'un recipient este comprimat cu ajutorul unui piston, ca la presa hidraulică, sau este pus în legătură printr'o conductă cu un alt vas deschis, având nivelul liber la o altitudine mai mare. In asemenea cazuri planul de sarcină la care se ajunge, luând înălţimile $h = \frac{p}{\varpi}$ deasupra punctelor lichidului din recipient, este un plan orizontal fictiv, aşezat deasupra masei lichide. Să presupunem că, fără a se schimba sensibil condiţiile echilibrului intern al lichidului (d. e. prin ieşirea cu această ocazie a unei mici cantităţi din recipient), am scufunda în lichid un tub vertical până la un punct oarecare B. Acest tub vertical (Fig. 23), suficient de lung şi de subţire, însă fără a fi capilar, şi având capătul inferior deschis, îl vom presupune la celălalt capăt închis şi golit de aer. Lichidul se va ridica în tub la o înălţime care depinde de presiunea în B şi am avea, pentru masa continuă a

lichidului din recipient şi tub, condiţiile cazului *a)*; lichidul ridicat se va opri deci exact în planul de sarcină, materializat astfel prin o mică suprafaţă liberă.

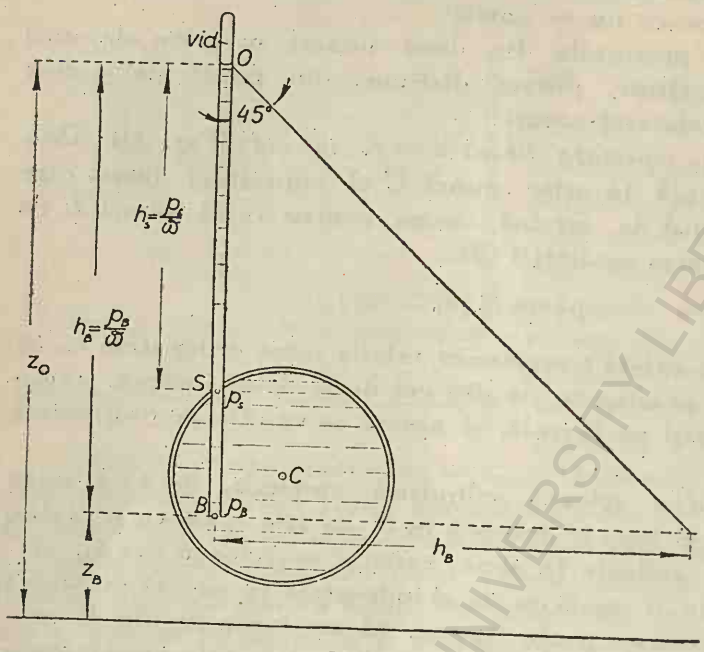


Fig. 23

După ecuaţia (2) avem $p_B = \varpi (z_0 - z_B) = \varpi h_B$; luând secţiunea tubului egală cu unitatea, vedem că presiunea p_B din B ar fi echilibrată de greutatea coloanei de lichid din tub, având ca înălţime $OB = h_B$ (înălţimea piezometrică sau reprezentativă a acelei presiuni).

Pentru acest motiv tubul în chestiune se numeşte *tub piezometric* sau simplu *piezometru*.

Comparând presiunile din B şi din punctul S al peretelui de pe aceiaşi verticală — înainte de introducerea tubului — vom scrie:

$$p_B = \varpi (z_S - z_B) + p_S$$

şi putem astfel spune, că p_B se datoreşte parte greutăţii coloanei SB de lichid, de secţiune egală cu unitatea, ce apasă în B, şi parte componentei verticale a reacţiunii peretelui ce se exercită pe baza superioară, în general oblică, a menţionatei coloane.

Această componentă poate fi la rândul ei înlocuită prin greutatea unei coloane de lichid de secţiune dreaptă egală cu unitatea şi de înălţime $h_s = \frac{p_s}{\varpi}$, cât ar fi şi înălţimea deasupra lui S a coloanei din tubul de mai sus. Acţiunea antagonistă a lichidului asupra peretelui în S lucrează evident din interior spre exterior.

Când dimensiunile vasului în sens vertical sunt reduse şi greutatea specifică a lichidului relativ mică, iar presiunile interi-

oare mari, diferențe ca $\varpi(z_S - z_B)$ se pot neglija față de aceste presiuni, vorbindu-se numai de presiunea din centrul de greutate C al secțiunei, care în realitate este presiunea medie:

$$p_B \cong p_S \cong p_C .$$

c) *Lichid cu suprafață liberă* ($z = z_A$) *în contact cu un mediu gazos sau de vapori*, care exercită în ori ce punct A al acelei suprafețe o presiune p_a. In acest caz vom găsi în O, cu $h_a = \frac{p_a}{\varpi}$ mai sus decât A, planul de sarcină $p = 0$. Un piezometru suficient de lung cu gura inferioară cufundată sub A iar sus închis și perfect golit de aer, se va umplea cu apă până în O (Fig 24). In cazul atmosferei, luând ca unități metrul și kilogramul (cum $p_a = 10336\ kg/m^2$ și $\varpi = 1000\ kg/m^3$) rezultă $h_a = \frac{p_a}{\varpi} \cong 10\ m$.

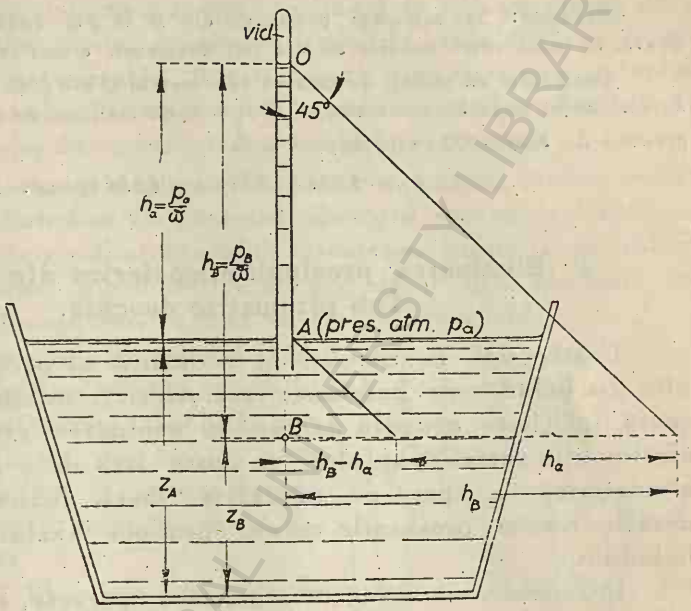


Fig. 24

Egalitatea (2), aplicată cu punctul A pe suprafața liberă — d.e. pe verticala lui B — unde presiunea este p_a, arată că presiunea p_B în B se datorește, parte greutății coloanei lichide

$$\varpi(z_A - z_B)$$

și parte presiunei p_a a mediului ce apasă pe suprafața liberă, presiune echivalentă cu greutatea unei coloane de lichid de înălțime $h_a = \frac{p_a}{\varpi}$.

Repartiția presiunilor pe o verticală în lichid se poate arăta grafic, dacă din O, unde verticala întâlnește planul de sarcină ($p = 0$), se duce o dreaptă la 45^0.

Orizontalele, cuprinse între această dreaptă şi verticala lui O, dau înălţimile piezometrice respective. In fig 24 s'a tras şi din A dreapta la 45^0, care dă repartiţia înălţimilor piezometrice datorite numai lichidului.

Inmulţind pe h_B cu ϖ, deducem presiunea respectivă.

Exemplu: Să calculăm presiunea din B la $2\,m$ adâncime sub suprafaţa liberă, în cazul când aceasta se află sub presiunea atmosferică de $1{,}034\ kg/cm^2$.

Dacă luăm ca unităţi de măsură centimetrul şi kilogramul, avem: $\varpi = 0{,}001\ kg/cm^3$, astfel că la fiecare metru — $100\,cm$ — de înălţime de coloană corespunde o greutate de $100 \times 0{,}001 = 0{,}1\ kg/cm^2$ şi deci

$$p_B = 1{,}034 + 0.10 \times 2 = 1{,}234\ kg/cm^2.$$

2· Eliminarea presiunii atmosferice din formule. Tub pizometric deschis.

Foarte des, la calculul de rezistenţă al pereţilor unui vas plin cu lichid sub presiunea atmosferică, admisă constantă pe toată înălţimea ocupată de vas, la evaluarea presiunilor hidrostatice (din partea lichidului) se poate lăsa de o parte presiunea atmosferică ce apasă pe suprafaţa liberă, luându-se în consideraţie numai presiunile ce s'ar produce exclusiv de greutatea lichidului.

Intradevăr, am văzut că atmosfera sporeşte, cu aceeaşi cantitate p_a, presiunile ce în cazul vidului s'ar exercita în interiorul lichidului şi deci şi pe faţa muiată a pereţilor.

Pereţii însă suportă presiunea p_a şi pe suprafaţa lor exterioară, astfel că, în cele din urmă, p_a se elimină, rămânând numai presiunea lichidului din cazul vidului.

Această eliminare presupune, ceace de altfel este cazul obişnuit, că se pot neglija variaţiunile, după altitudine, ale presiunii atmosferice din exteriorul pereţilor. Riguros vorbind însă, pe când presiunea atmosferică p_a dela suprafaţa liberă se transmite neschimbată, deci uniform repartizată în interiorul lichidului, în afară ea creşte uşor cu adâncimea.

Presiunile unitare din lichid, astfel considerate, adică cu p_a mai mici de cât cele reale sau absolute, se pot numi *suprapresiuni*, reprezentând excedentul presiunilor reale asupra presiunii atmosferice. Inălţimea lor piezometrică h, cu $h_a = \frac{p_a}{\varpi}$ mai mică de cât a presiunilor absolute, poate fi materializată printr'un tub piezometric cu capătul superior deschis în atmosferă, iar nu-

vid. Nivelele piezometrice respective se află în acelaşi plan orizontal, având presiunea absolută p_a şi fiind aşezat cu h_a mai jos de cât planul de sarcină absolut.

Repartiţia pe o verticală a presiunilor interne, măsurate de înălţimile piezometrice absolute mai puţin h_a, este dată, precum s'a mai spus mai sus, de o dreaptă înclinată la 45°, ce pleacă dela punctul verticalei unde presiunea absolută este $p = p_a$, adică suprapresiunea este nulă. Acest punct corespunde cu nivelul stabilit într'un tub piezometric cu capătul superior deschis în atmosferă (vezi fig. 24, punctul A al suprafeţei libere.)

Pentru suprapresiunile, astfel socotite, putem avea şi valori negative, corespunzând cu presiuni absolute *mai mici ca presiunea atmosferică*. Pentru măsurarea unor asemenea presiuni nu putem întrebuinţa tuburi piezometrice drepte, decât dacă ele sunt închise la capătul superior, în care va trebui făcut vid.

Astfel, la un vas plin cu apă (Fig. 25) răsturnat într'un alt vas, avem în B o presiune interioară absolută, măsurată în coloană de lichid prin $h_B = h_a - H$, adică o suprapresiune negativă, măsurată, în înălţime de coloană, prin $-H$.

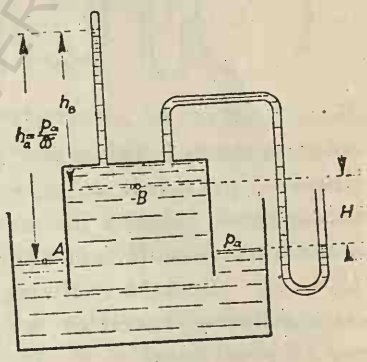


Fig. 25.

Dacă nivelul liber din vas nu este vizibil, folosind tuburi recurbate, putem realiza nivelul piezometric în tub deschis, având aceeaşi cotă după principiul vaselor comunicante, spre a măsura deasupra acelui nivel înălţimea de suprapresiune negativă.

Pe graficele presiunilor arătate mai sus (Fig. 24), în loc de a se da h prin o dreaptă înclinată la 45°, se poate figura pe o scară oarecare chiar $p = \varpi h$, spre a se citi direct presiunile. Linia de repartiţie va lua atunci o înclinare care depinde de ϖ şi de scara aleasă pentru presiuni; această dreaptă se poate construi cu ajutorul a două din punctele ei.

3. Măsurarea presiunilor.

Din ceeace precede rezultă că, în cazul existenţei unei suprafeţe libere supusă presiunii atmosferice, presiunile interioare dintr'un lichid, minus presiunea atmosferică, se măsoară, în înălţime de coloană de lichid, prin adâncimea punctului considerat sub

suprafaţa liberă. Acolo unde aceasta nu este posibil, fie din cauza accesului dificil, fie din lipsa unei suprafeţe libere (vase sau conducte forţate), se întrebuinţează aparate speciale de măsură, cari sunt;

a) *Piezometrul cu apă închis sau deschis*, menţionat mai sus, având o înălţime suficientă pentru a se putea stabili în el suprafaţa liberă. La o conductă, înălţimea piezometrică se măsoară în general faţa de axa conductei (Fig. 26). In practică piezometrul tubular cu apă se întrebuinţează numai pentru presiuni mici, în care caz intervin înălţimi moderate.

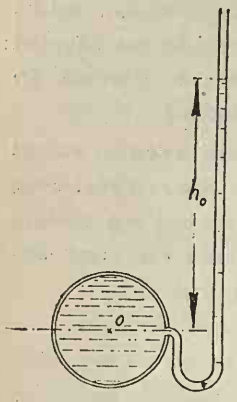


Fig. 26

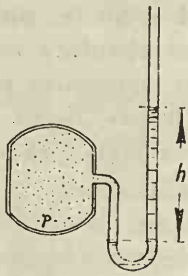


Fig. 27

Cu un piezometru asemănător se poate măsura şi presiunea p a unui gaz (Fig 27).

b) *Piezometrul cu mercur* este un aparat analog, care, în locul unei coloane de apă, foloseşte pentru echilibrarea presiunii de măsurat greutatea unei coloane de mercur, având o înăţime h mult mai redusă, de circa 13,6 ori. Această înălţime, înmulţită cu greutatea specifică a mercurului, ne dă presiunea.

Se aranjează astfel ca suprafaţa de separaţie dintre cele două lichide să fie la cota punctului unde se măsoară presiunea (Fig. 28).

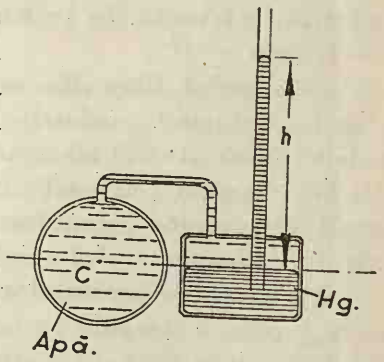


Fig. 28

c) *Manometrul cu arc* se compune dintr'un recipient metalic, elastic, care se pune în legătură cu mediul, a cărui presiune trebue măsurată; forma primită de recipient, care se deformează sub acţiunea presiunii interioare, este evident funcţie de acea presiune. Deformaţia, suficient amplificată, este arătată de un index pe o scară, stabilită comparativ cu indicaţiile unui piezometru cu mercur.

La această categorie aparţine manometrul *Bourdon* (Fig. 29), constând dintr'un tub arcuit de secţiune eliptică, care, la creşterea presiunei, tinde să devină circulară şi prin aceasta deschide arcul format de axa tubului.

Manometrul *Schäffer - Budenberg* (Fig. 30) este un aparat analog, la care pentru măsurarea presiunii se foloseşte o placă circulară ondulată, care sub acţiunea unilaterală a presiunii se îndoaie.

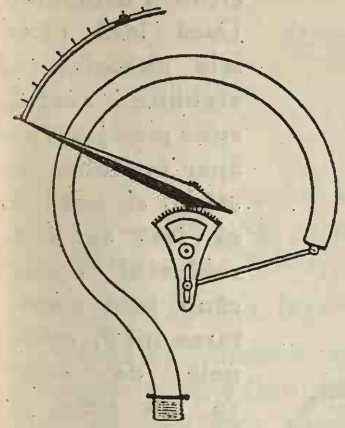


Fig. 29

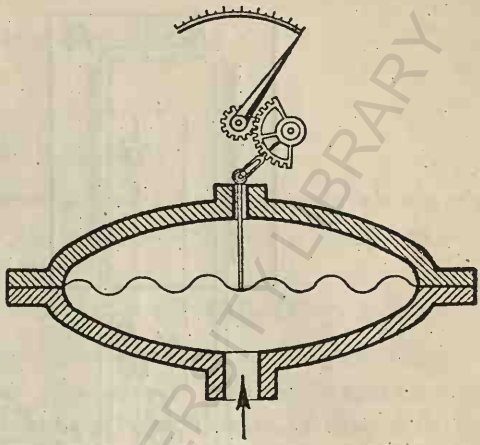


Fig. 30

Aceste manometre se alterează cu timpul, ca orice resort elastic; de aceea ele trebuesc controlate des prin comparaţiune cu un aparat cu mercur.

Manometrele metalice din comerţ au în general o tubulură de racordare de $^1/_2''$ (jumătate ţol) cu un diametru exterior de 21 mm.

d) *Tub piezometric diferenţial*. Pentru a măsura diferenţa presiunilor din două conducte vecine, pline cu acelaşi lichid, ne servim de piezometrul diferenţial al lui *Belanger*. El constă dintr'un tub de sticlă în formă de *U* răsturnat, cu ramurile ţinute vertical şi puse în comunicaţie cu conductele, a căror diferenţă de presiune voim s'o aflăm, prin tuburi flexibile de cauciuc. Deschizând robinetele r şi r', lichidul se urcă în cele două ramuri, fără a umple însă complect aparatul, din cauza aerului închis în partea superioară, în o cantitate ce se poate potrivi prin robinetul R, astfel ca nivelele să apară în câmpul aparatului. Piezometrul diferenţial servă şi ca accesoriu la întrebuinţarea aparatului *Pitot* — vezi Hidrodinamica — pentru măsurarea vitezelor dintr'un curent de apă, măsurare bazată pe aceea a unei diferenţe piezometrice.

Avantajul piezometrului diferenţial, la măsurarea presiunilor mari, este următorul: aerul închis în tub, nefiind în comunicaţie cu atmosfera, se va găsi comprimat la o presiune mai mare p_1; în consecinţă lichidul va atinge înălţimi mai mici ca h şi h' ce s'ar sta-

bili în tuburi piezometrice simple, închise la capăt; acele înălțimi vor fi respectiv $h - \frac{p_1}{\varpi}$ și $h' - \frac{p_1}{\varpi}$, ϖ fiind greutatea specifică a lichidului. Dacă însă nivelele piezometrice, stabilite astfel, sunt prea jos și nu apar în tubul de sticlă, se mai lasă să iasă aer prin robinetul R, până când prin micșorarea lui p_1 coloanele de lichid se vor ridica în brațele de sticlă, păstrând bine înțeles aceeași diferență de nivel.

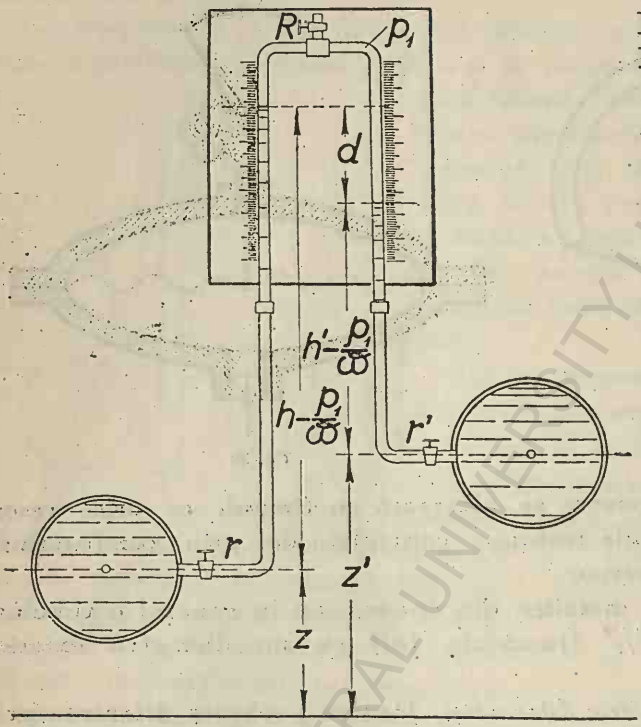


Fig. 31

Din figura 31 rezultă că

$$h - \frac{p_1}{\varpi} + z = h' - \frac{p_1}{\varpi} + z' + d,$$

de unde

$$h - h' = d + z' - z.$$

Inmulțind cu ϖ, avem diferența de presiune căutată.

Dacă axele conductelor se găsesc la aceeași cotă, avem:

$$h - h' = d.$$

4. Presiuni interioare în lichide cu densități diferite.

Dacă lichide cu densități diferite și fără afinitate chimică între ele sunt conținute în același vas, ele nu se amestecă, ci se mențin separate, suprapunându-se unul altuia (Fig. 32). Această suprapunere, în cazul echilibrului stabil, se face în ordinea densităților descrescând de jos în sus și suprafețele de separație vor

fi, după cum am văzut, suprafeţe echipotenţiale. În câmpul gravitaţiei cu g constant ele vor fi planuri orizontale.

La integrarea dealungul unei linii AB a ecuaţiei

$$dU + \frac{dp}{\rho} = g\,dz + \frac{dp}{\rho} = 0$$

sau

$$\varpi\,dz + dp = 0,$$

trebue ţinut seama că, la trecerea liniei prin suprafeţele de separaţie, ϖ se schimbă, primind succesiv valorile: ϖ_1, ϖ_2, ... etc.

Pentru trei lichide, vom avea

$$p_B - p_A = \varpi_1 (z_A - z') + \varpi_2 (z' - z'') + \varpi_3 (z'' - z_B).$$

Aceasta exprimă, analog ca şi pentru un singur lichid, că diferenţa presiunilor unitare din două puncte oarecari este egală cu greutatea unei coloane mixte, compusă din diferitele lichide, în felul cum sunt ele dispuse în sens vertical, având ca bază unitatea de suprafaţă şi ca înălţime diferenţa de altitudine dintre punctele A şi B.

Luându-se A chiar pe suprafaţa liberă, deasupra căreia s'ar găsi vid, greutatea coloanei mixte respective ar fi egală cu presiunea din B.

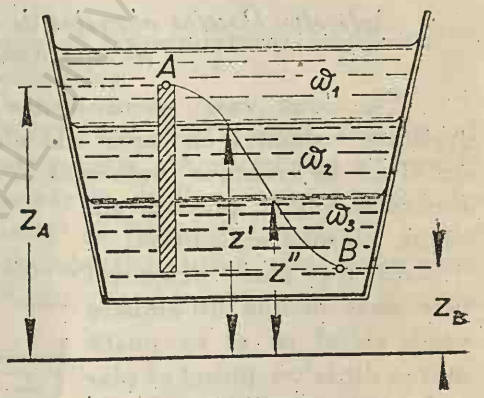


Fig. 32

Deci şi aici se poate spune că presiunea statică este datorită greutăţii coloanei în chestiune.

Dacă deasupra suprafeţei libere se exercită presiunea unui gaz, d. e. p_a a atmosferei, suprapresiunea $p - p_a$ fiind egală cu greutatea coloanei mixte ce apasă în punctul considerat, p (absolut) va fi egal cu greutatea menţionată plus p_a.

Ca şi la un singur lichid, se poate în general elimina şi aici presiunea atmosferică, ţinându-se seamă numai de suprapresiuni.

Când avem lichide de diferite greutăţi specifice, înălţimea reprezentativă h nu are sens, decât dacă se precizează, în raport cu care din ele este exprimat p. Dacă în exemplul de mai sus alegem bunăoară lichidul ϖ_3, vom avea $p = h\varpi_3$ sau $h = \frac{p}{\varpi_3}$

De aceea chiar, pentru reprezentarea grafică a repartiţiei presiunii pe o verticală este preferabil a se lua ca ordonate, perpendicular pe axa verticală a absciselor, în loc de h corespunzător unei anumite greutăţi specifice, presiunea însăşi pe o anumită scară.

Ecuaţia generală $\varpi\, dz - dp = 0$ arată că coeficientul liniar al dreptei, care dă repartiţia presiunii într'un lichid, este chiar ϖ, unghiul dreptei cu verticala fiind cu atât mai mare cu cât ϖ este mai mare. Linia de repartiţie liniară va fi deci frântă la fiecare suprafaţă de separaţie şi, pentru a o construi, e destul a se duce ordonatele p, calculate după cum s'a indicat mai sus, pentru punctele de separaţie (Fig. 33).

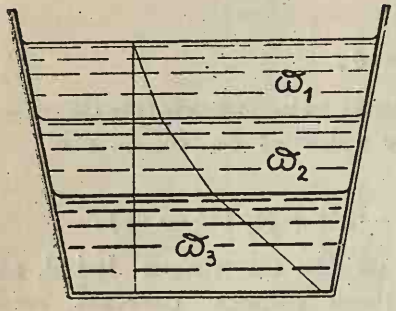


Fig. 33

Aplicaţie. Poziţia planului de separaţie între două lichide în vase comunicante.

Fie două vase comunicante (Fig. 34), ce conţin lichid de greutate volumică ϖ, unul din ele având deasupra acelui lichid un altul de greutate volumică ϖ'. Suprafeţele libere şi cele de separaţie vor fi, precum am văzut, planuri orizontale.

Dacă un plan orizontal taie masa lichidă din ambele vase, astfel ca să se poată merge dintr'un punct al planului din primul vas, la alt punct al planului din al doilea vas, pe un drum care să nu iasă din acelaşi lichid ϖ, vom avea pe menţionatul plan, după cum ştim, aceeaşi presiune în ambele vase conform ecuaţiei diferenţiale $dp + \varpi\, dz = 0$, care, integrată în interiorul aceluiaşi lichid, dă la cote egale presiuni egale.

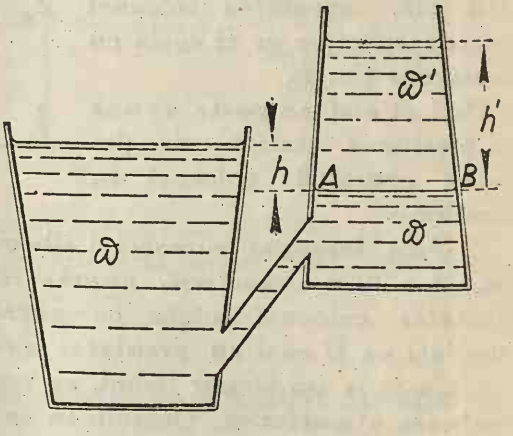


Fig. 34

Dacă în cazul fig. 34 considerăm planul de separaţie AB prelungit şi prin celălalt vas, planul va fi caracterizat prin aceeaşi

presiune p și vom putea aplica legea hidrostatică în fiecare din vase între menționatul plan și suprafața liberă respectivă, obținând

$$p = \varpi h = \varpi' h', \quad \frac{h}{h'} = \frac{\varpi'}{\varpi}.$$

Cu alte cuvinte, *înălțimile celor două lichide deasupra planului de separație vor fi invers proporționale cu greutățile lor volumice*.

In caz de mai multe lichide suprapuse, la fiecare din vase se procedează în mod analog, plecând fie din două puncte cu presiuni egale, așezate respectiv în cele două vase, după cum am făcut mai sus, fie dela un punct, așezat în conducta de legătură, și făcând integrarea în spre cele două suprafețe libere. Procedeul revine la a exprima contrabalansarea greutăților a două coloane mixte de lichid, una făcând parte din primul vas până la suprafața liberă din el, iar alta din cel de al doilea, până la suprafața liberă din acesta.

5. Principiul lui Pascal sau al transmisiunii integrale a presiunilor.

Am văzut că diferența de presiune între două puncte ale unui lichid în echilibru depinde numai de diferența altitudinilor (cotelor) lor. Dacă deci printr'un mijloc oarecare presiunea statică se mărește într'un punct al lichidului, această mărire va apare transmisă în toate punctele lichidului. Pe acest principiu, denumit *principiul lui Pascal*, se bazează *presa hidraulică*.

CAP. V

PRESIUNEA UNUI LICHID IN REPAOS PE PEREȚI UDAȚI.

Să considerăm într'un vas fix un lichid în repaos. Luăm ca plan de referință suprafața liberă, numită și *plan de apă*. Presiunea pe un element oarecare $d\Omega$ al peretelui (lăsând la o parte presiunea atmosferică $p_0\, d\Omega$, care se exercită și pe partea exterioară a peretelui) este $dP = \varpi z\, d\Omega$.

Vom studia mai întâi cazul pereților plani.

1. Pereți plani.

a) *Rezultanta presiunilor.* Fie un perete plan normal pe figură, făcând unghiul α cu planul de apă. Presiunile pe elementele $d\Omega$ ale peretelui fiind paralele, se pot compune într'o rezultantă unică.

Pentru o porțiune oarecare a peretelui, d. e. aceea limitată de conturul arătat, culcat pe planul figurei, rezultanta va fi

$$P = \int z\, d\Omega = \varpi z_G\ \Omega\,,$$

unde z_G este ordonata centrului de greutate G al suprafeței considerate, astfel că presiunea ϖz_G în centrul de greutate al suprafeței este totodată și presiunea medie, deoarece $\frac{P}{\Omega} = \varpi z_G$. Se ajunge la același rezulat (Fig. 35), luând ordonatele z' față de orizontala Oy, urma planului de apă pe perete:

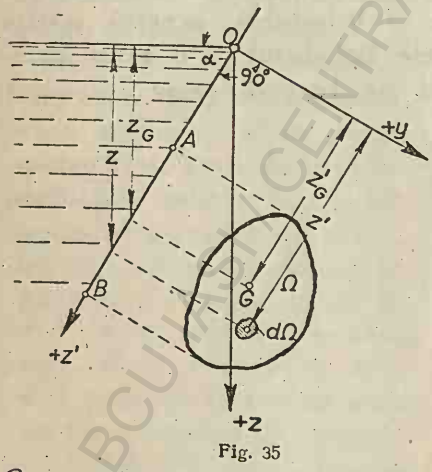


Fig. 35

$$dp = \varpi\, z'\, \sin\alpha\, d\Omega$$

$$P = \varpi z'_G\ \sin\alpha\,.\,\Omega = \varpi z_G\ \Omega\,,$$

căci

$$z'_G \sin \alpha = z_G .$$

Rezultă că presiunea pe o suprafață plană este egală cu greutatea unei coloane de lichid având acea suprafață ca bază, iar ca înălțime, ordonata centrului ei de greutate, care se poate numi și *baricentru*.

b) *Componentele verticală și orizontală*: P_z și P_x, după direcțiunile z și x, ale acestei presiuni, cari se numesc și *rezultante verticală și orizontală*, se obțin, fie adunând proecțiunile respective ale presiunilor elementare, fie direct prin proectarea rezultantei generale:

$$P_x = \varpi z_G \Omega \sin \alpha = \varpi z_G \Omega_x \qquad P_z = \varpi z_G \Omega \cos \alpha = \varpi z_G \Omega_z ,$$

unde Ω_z și Ω_x sunt proecțiile suprafeței plane Ω respectiv pe planurile coordonate, normale direcțiunilor x (plan vertical) și z (plan orizontal).

c) *Centrul de presiune*. Pentru a găsi punctul de aplicație al rezultantei generale, numit și centru de presiune, luăm, față de planul de apă, momentele presiunilor elementare paralele, învârtite în jurul punctelor lor de aplicație, astfel ca să devie orizontale, adică paralele cu planul de proeicție, ceeace evident nu schimbă centrul forțelor paralele.

Ordonata verticală a acestui centru va fi

$$z_C = \frac{\int \varpi z^2 \, d\Omega}{\int \varpi z \, d\Omega} = \frac{\int z^2 d\Omega}{\int z d\Omega} = \frac{r^2 \Omega}{z_G \Omega} = \frac{r_G^2 + z_G^2}{z_G} = \frac{r_G^2}{z_G} + z_G , \qquad (1)$$

unde r și r_G sunt razele de girație ale suprafeței considerate, respectiv față de planul de apă și de planul orizontal ce trece prin centrul de greutate (problemă în trei dimensiuni).

Se vede că centrul de presiune este în general mai jos de baricentrul suprafeței Ω.

Numai în cazul particular $r_G = 0$, adică atunci când suprafața Ω se află întreagă în planul orizontal ce trece prin centrul ei de greutate, fiind cu alte cuvinte orizontală, cele două centre coincid. Aceasta devine evident prin faptul că atunci presiunea pe Ω este uniform repartizată, pe când la o suprafață oblică, presiunile crescând în jos, centrul de presiune va fi sub centrul de greutate.

Dacă luăm momentele presiunilor elemementare, în orientarea lor reală, față de un plan paralel cu ele, care ar trece prin urma Oy a planului de apă, obținem

$$z'_C = \frac{\int \varpi z'^2 \sin\alpha \, d\Omega}{\int \varpi z' \sin\alpha \, d\Omega} = \frac{\int z'^2 d\Omega}{\int z' d\Omega} = \frac{r'^2 \Omega}{z'_G \Omega} = \frac{r_G'^2 + z_G'^2}{z'_G} = \frac{r'^2_G}{z'_G} + z'_G,$$

relație analoagă cu precedenta, dar în care razele de giratie r' și r'_G ale suprafeței Ω sunt luate, respectiv, față de axa Oy și de o axă paralelă cu Oy trecând prin centrul de greutate al suprafețe (problemă în două dimensiuni).

Centrul de presiune ar fi complet determinat, dacă în această problemă am cunoaște coordonata față și de o a doua axă, d. e. Oz' perpendiculară pe prima. In acest caz luăm momentele față de Oz', obținând după suprimarea factorului comun $\sin\alpha$

$$y_C = \frac{\int \varpi z' y \, d\Omega}{\int \varpi z' d\Omega} = \frac{\int z' y \, d\Omega}{\int z' d\Omega} = \frac{\int z' y \, d\Omega}{z'_G \Omega}.$$

Dacă axa Oz' este întâmplător axă principală de inerție (în particular o axă de simetrie), vom avea

$$\int z' y \, d\Omega = 0,$$

rezultând $y_C = 0$. Centrul de presiune se va găsi în acest caz pe Oz' și, atunci, pentru a-l avea complet determinat, este suficient a cunoaște z'_G sau z_G.

Aplicând formula (1) găsim (Fig 36) că:

1°. Pentru un dreptunghiu cu o latură în planul de apă, centrul de presiune se găsește în axa de cea mai mare pantă, la două treimi din adâncime.

2°. La un triunghiu isoscel, având baza în planul de apă, centrul de presiune se găsește în mijlocul medianei.

3°. La un semicerc cu diametrul în planul de apă, centrul de presiune se găsește pe axa de simetrie la o distanță de diametru, egală cu $\frac{3\pi r}{16}$, unde r este raza semicercului.

4°. La un cerc de rază r și cu centrul G la distanța a

de linia de apă, centrul de presiune se găsește sub centrul de figură cu $\frac{r^2}{4a}$.

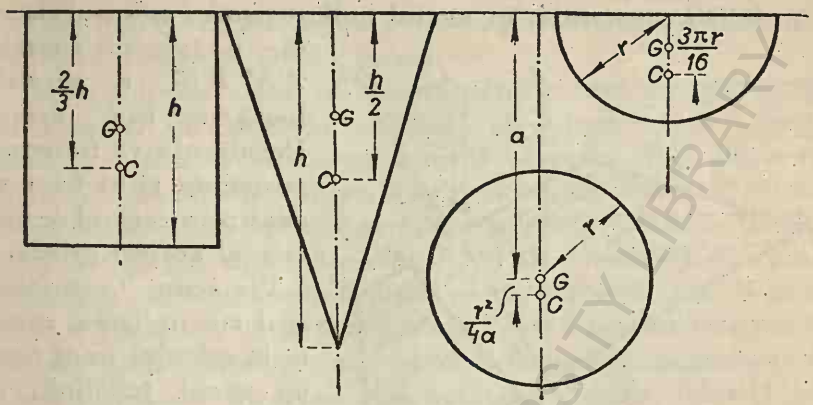


Fig. 36

d) *Procedeu grafic.* Să considerăm un perete plan, normal pe planul figurei și udat pe una din fețele lui de un lichid în repaos. Să studiem grafic presiunea exercitată de lichid pe o parte AB a peretelui, având forma unui trapez cu laturile paralele orizontale, după cum se arată în $A'A''$ $B'B''$, pe peretele culcat pe figură în jurul urmei OB a acestuia. (Fig 37), Dacă latura A nu se găsește chiar în planul de apă ci mai jos, studiul grafic este mult mai comod de cât cel analitic.

Repartiția presiunei pe o dreaptă, verticală sau oblică, făcându-se liniar, se poate construi ușor linia înălțimilor reprezentative ale presiunilor din diferite puncte ale liniei de cea mai mare pantă a peretelui, ducând acele înălțimi numai în două puncte, perpendicular pe urma peretelui; unul din aceste puncte poate fi de preferință O, intersecția cu linia de apă, unde $p = 0$ dacă lăsăm la o parte presiunea atmosferică.

Construim astfel *trapezul* sau *triunghiul de presiune*, care dă în orice punct înălțimea piezometrică.

Să presupunem suprafața de perete considerată, împărțită în fâșii elementare prin drepte orizontale.

Presiunea elementară $\varpi z\, d\Omega$ nu este altceva decât, orientată normal pe AB, greutatea volumului de lichid elementar de formă prizmatică, având $d\Omega$ (haşurat pe figură) ca bază dreaptă iar ca înălțime : z.

Ea se poate exprima și prin produsul suprafeței elementare

a trapezului de presiune, înmulțită cu înălțimea b a fășiei pe perete și cu greutatea volumică ϖ.

Rezultanta P va fi deci egală cu greutatea prismei trunchiate $ACDB$ construită, în modul indicat pentru volumul elementar, pe întreaga suprafață $A'A''\ B'B''$ a peretelui, luată ca bază dreaptă. Rezultanta va fi normală pe perete și va trece evident prin centrul de greutate al acestei prisme.

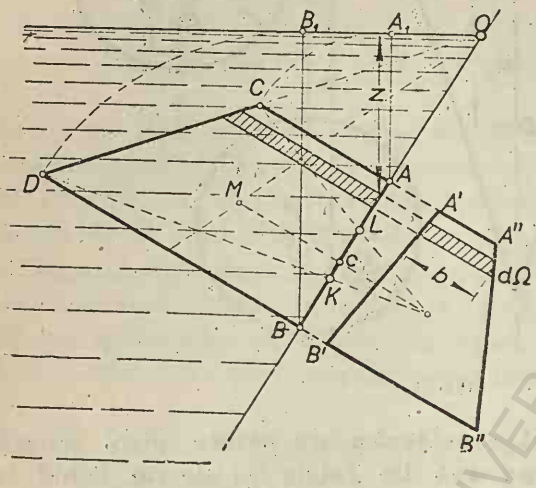


Fig. 37

Fie acum b constant și egal cu unitatea, cum se ia la calculul unui perete de canal indefinit, din care se consideră numai o porțiune cu $b = 1$. Presiunile elementare rezultă în acest caz din simpla înmulțire cu ϖ a fășiilor elementare ale trapezului de presiune, iar centrul de greutate al prismei trunchiate descrisă — care punct, în proecție pe AB, dă centrul de presiune — va cădea evident pe planul figurii în centrul de greutate M al trapezului de presiune.

Perpendiculara dusă din M pe AB va da deci centrul de presiune C, în care este aplicată rezultanta P. Dacă peretele AB ar începe dela suprafața liberă, am avea un triunghiu de presiune și C ar fi aplicat la $2/3$ din adâncime, rezultat obținut și prin calcul. Este evident că, în loc de a lua centrul trapezului $ACDB$ putem lua pe acela al trapezului AA_1B_1B, care are laturile lui paralele, respectiv egale cu ale primului, orientate însă vertical; proectând acest centru vertical pe AB cădem peste același punct C.

Cunoscând modul de calcul analitic sau grafic al presiunilor unui lichid pe pereți udați, se determină sarcinile exterioare în problemele de calculul rezistenței acestor pereți.

2. Pereți de orice formă.

a) *Rezultantele orizontale și rezultanta verticală.* Presiunile elementare $dP = \varpi z\, d\Omega$ nefiind în acest caz paralele, nu se pot compune în general într'o singură rezultantă de translație ci într'o rezultantă și un cuplu rezultant sau în două sau mai multe rezultante.

In cazul particular, însă, al totalităţii pereţilor udaţi ai vasului, presiunile sunt totdeauna reductibile la o rezultantă unică, care este verticală, egală şi de sens contrar cu greutatea lichidului, după cum rezultă aceasta din considerarea echilibrului întregei mase lichide aflătoare în vas.

Să considerăm acum un perete neplan, însă de o formă specială, adeseori întâlnită în practică, şi anume aceea cilindrică orizontală, având ca directrice o curbă oarecare (Fig. 38) şi fiind limitată de două planuri, normale pe generatrice. Sistemul presiunilor după fâşiile orizontale ale peretelui se poate reduce în acest caz la două rezultante, una orizontală P_x şi alta verticală P_z, aşezate în secţiunea mijlocie a cilindrului, pe care o vom lua ca plan al figurei. Intradevăr, să descompunem fiecare presiune elementară după cele două direcţii x şi y şi să compunem separat forţele paralele de aceeaşi direcţie. Cu notaţia de indici folosită şi în capitolul precedent, vom scrie:

$$dP_x = \varpi\, z\, d\Omega \sin\alpha = \varpi\, z\, d\Omega_x$$

$$dP_z = \varpi\, z\, d\Omega \cos\alpha = \varpi\, z\, d\Omega_z .$$

Rezultă pentru orice suprafaţă Ω a peretelui:

$$P_x = \varpi \int z\, d\Omega_x = \varpi\, z_x\, \Omega_x \qquad (1)$$

$$P_z = \varpi \int z\, d\Omega_x = \varpi\, z_z\, \Omega_z , \qquad (2)$$

unde Ω_x şi Ω_z sunt proecţiile suprafeţei de perete considrată, respectiv pe planurile yOz şi xOy, z_x este ordonata verticală

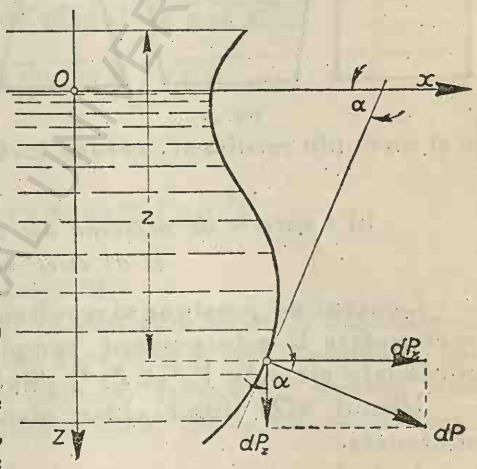


Fig. 38

medie a elementelor $d\Omega_x$ deci ordonata baricentrului proecţii verticale Ω_x, iar z_z ordonata medie a elementelor $d\Omega_z$, reprezntând adâncimea medie a lui Ω, în sensul că volumele $\int z\, d\Omega_z$ şi $z_z\, \Omega_z$ sunt egale.

Fiindcă z al elementului $d\Omega$ este şi z al proecţiei acestuia: $d\Omega_x$ pe planul vertical yOz, P_x va fi după (1) egal cu presiunea ce s'ar exercita pe proecţia respectivă Ω_x a suprafeţei peretelui.

Dacă peretele, în loc de a fi cilindric orizontal, are o formă oarecare, descompunerea presiunilor pe orice element de perete (infinitezimal în toate sensurile) se poate totdeuna face după

trei axe, de preferință una verticală Oz și două orizontale Ox și Oy.

Pentru direcțiile Ox și Oy se obțin formule analoage cu (1), una pentru P_x și alta pentru P_y.

Pentru P_z se obține în toate cazurile formula (2), care arată că rezultanta verticală este totdeauna egală cu greutatea G a coloanei verticale de lichid, limitată între planul de apă și porțiunea considerată Ω a peretelui.

Aceasta explică *paradoxul hidrostatic al lui Pascal*, anume pentru ce presiunea pe fund nu depinde de forma restului vasului.

Astfel, pentru cele trei vase cu funduri egale din fig. 39 dacă înălțimea de apă este în toate aceeași, rezultanta pe fund P_z va fi aceiași.

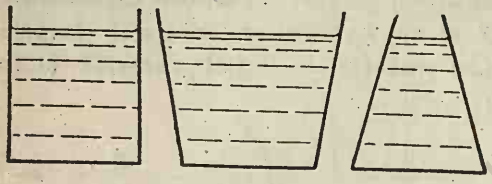


Fig. 39

Rezultantele P_x, P_y, P_z, se pot totdeauna reduce, ca la ori ce problemă de compunere deforțe, la numai două sau la o rezultantă de translație și un cuplu rezultant, ceeace însă în practică nu prezintă interes

b) *Centrele de presiune ale rezultantelor orizontale și al celei verticale.*

Centrul de presiune al rezultantei P_x, trebuind să se găsească pe suprafața Ω, este evident complet determinat prin cele două coordonate ale sale Y_x și Z_x *) după axele Oy și Oz.

Planul xOy fiind chiar planul de apă, să căutăm aceste coordonate.

Luând ca mai sus momentele forțelor de presiune elementare în raport cu planul de apă xOy (deci brațele în direcția Oz) și notând cu litere mici, prevăzute cu indicile rezultantei, coordonatele baricentrului, vom avea:

$$Z_x P_x = \int z^2 \, d\Omega = r^2_x \, \Omega_x$$

$$Z_x = \frac{r^2_x \, \Omega_x}{z_x \, \Omega_x} = \frac{r^2_x}{z_x},$$

expresiuni analoage ca pentru un perete vertical.

*) Se folosesc majuscule pentru coordonatele centrului de presiune.

Luând momentele în raport cu planul xOz (deci brațele în direcția Oy), obținem

$$Y_x = \frac{\int yz\, d\Omega_x}{z_x\, \Omega_x} = \frac{r^2_{yz}}{z_x},$$

unde r_{xy} este raza de girație a momentului centrifug al proecției verticale Ω_x față de axele Oy și Oz. Centrul lui P_x este astfel determinat.

Expresiunile Z_y și X_y, relative la P_y după a doua axă orizontală Oy, sunt analoage, raza de girație a momentului de inerție centrifug al proecției Ω_y fiind notată cu r_{xz}.

Pentru aflarea coordonatelor X_z și Y_z ale centrului de presiune al rezultantei verticale P_z (orientând orizontal componentele elementare verticale, ceeace nu schimbă centrul acestor forțe paralele), luăm momentele față de planul de apă yOz:

$$X_z\, P_z = \int zx\, d\Omega_z = \varpi \int z\, dV,$$

și față de planul xOz

$$Y_z\, P_z = \varpi \int zy\, d\Omega = \varpi \int y\, dV,$$

unde dV este volumul elementar $zd\Omega$.

In acest caz X_z și Y_z sunt tocmai coordonatele baricentrului cilindrului vertical de lichid cu baza Ω și a cărui greutate este egală cu rezultanta P_z. Conchidem că, proectând vertical acest centru pe peretele Ω, vom obține centrul de presiune al acestei rezultante.

Dacă este vorba de întreaga suprafață muiată a unui vas, $P_z = \varpi \int z\, d\Omega$ reprezintă greutatea întregei mase de lichid, conținută în vas.

c) *Rezultanta presiunilor componente după o direcție oarecare.*

Să calculăm acum pentru orice formă de vas rezultanta P_m a componentelor sau proecțiunilor presiunilor elementare după o direcție oarecare m, făcând cu direcția verticală Oz unghiul φ. In cazul particular $\varphi = 0^0$ ar trebui să obținem P_z, calculat mai sus, iar pentru $\varphi = 90^0$ o rezultantă orizontală.

Să considerăm un element de suprafață $d\Omega$, prin a cărui normală n și verticală z vom presupune că trece planul figurei. Direcțiunea m nu va fi în general paralelă cu acest plan, astfel că, pe când unghiul $\sphericalangle (nz)$ se găsește în figură, unghiurile $\varphi = \sphericalangle (mz)$ și $\alpha = \sphericalangle (mn)$ vor fi în general figurate în proecție (Fig. 40).

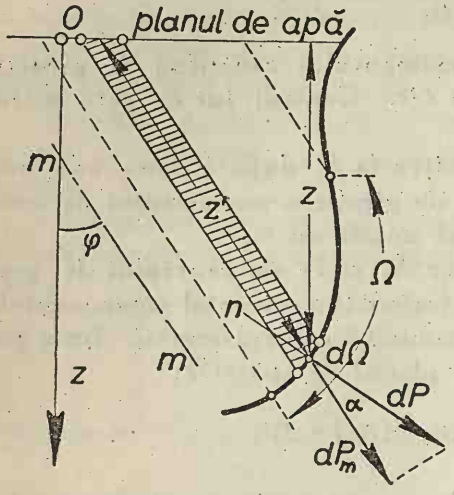


Fig. 40

Pentru elementul $d\Omega$, observând că direcțiunea n a normalei este variabilă, avem

$$dP_m = dP.\ cos \sphericalangle (mn) = \varpi z\, d\Omega\ cos \sphericalangle (mn) = \varpi z\ d\Omega_m,$$

$d\Omega_m$ fiind proecția lui $d\Omega$ pe un plan normal pe m.

Inlocuind acum și pe z prin $z' cos \varphi$, unde z' este ordonata oblică după m (în general necuprinsă în figură) în raport cu suprafața liberă, obținem:

$$dP_m = \varpi z' d\Omega_m\ cos \varphi$$

$$P_m = G'\ cos \varphi,$$

unde G' este greutatea cilindrului lichid (integrala prismei elementare haşurată), luat în direcția m și limitat între planul de apă și peretele Ω. Presupunând această greutate orientată în direcțiunea m, proecția ei verticală va fi P_m. Modul de compunere al lui P_m din forțele elementare (orientate după m)

$$dP_m = \varpi z\, d\Omega_m$$

arată că centrul său de aplicație va fi proecția pe perete, în direcția m, a baricentrului prismei menționate.

Pentru $\varphi = 0$ regăsim expresia lui P_z, pe când pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$, când $G' = \infty$ și $cos \varphi = 0$, obținem o formă nedeterminată, din care cauză aflarea rezultantei după o direție orizontală s'a tratat pe altă cale.

Notă. Se poate ajunge mai repede la expresia rezultantelor P_x, P_y, P_z, P_m și la poziția punctelor lor de aplicație (centre de presiune) în modul următor, în care se consideră de fapt reacțiunile (acelor forțe), exercitate din partea peretelui.

Pentru a calcula pe P_x, să construim (Fig. 41) o suprafață cilindrică având generatrice paralele cu x și ca directrice conturul

suprafeței Ω a peretelui; secțiunea dreaptă a cilindrului, astfel format, va fi Ω_x. Masa cilindrică dintre suprafețele Ω și Ω_x fiind în echilibru, suma proecțiilor pe axa Ox, ale forțelor cari acționează această masă, va fi nulă.

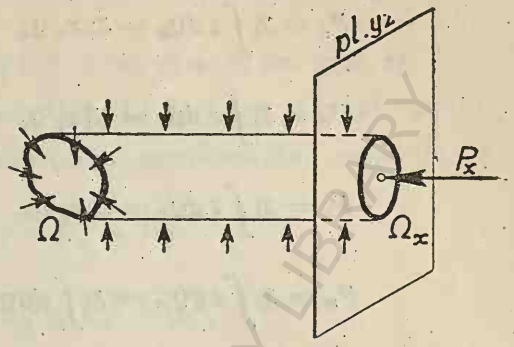


Fig 41

Cum presiunile pe suprafața cilindrică și greutatea corpului sunt normale pe Ox, rezultă că reacțiunea după direcția Ox a peretelui, adică proecția P_x a presiunilor pe Ω, luată cu sens schimbat, va echilibra presiunea depe secțiunea dreapta Ω_x; așa dar, ultima va fi egală cu P_x și va avea aceeași linie de acțiune, paralelă cu Ox, pe care se vor găsi și centrele respective de presiune de pe suprafețele Ω și Ω_x.

Același lucru pentru P_y.

Pentru a calcula pe P_z, să considerăm (Fig 42), în proecție pe Oz, echilibrul cilindrului vertical cuprins între peretele Ω și baza dreapta Ω_z din suprafața liberă. Reacțiunea peretelui — P_z va fi evident egală și de sens contrar cu greutatea G a acelui cilindru, și deci $\overline{P_z} = \overline{G}$, iar centrele de aplicație ale acestor două forțe se vor găsi pe aceeași verticală.

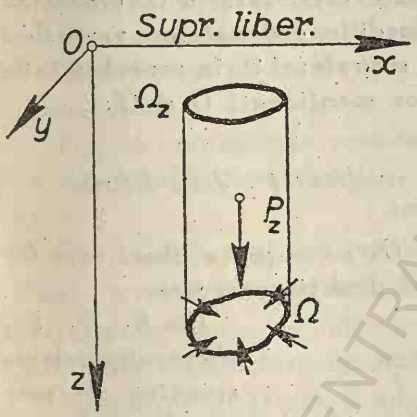


Fig. 42

In fine, pentru a calcula pe P_m să considerăm (Fig. 43), în proecție pe m, echilibrul unui cilindru lichid paralel cu m, cuprins între Ω și suprafața liberă și a cărui greutate fie G'.

Vom avea evident

$$G' \cos \varphi = P_m,$$

iar centrul de greutate al cilindrului în chestiune împreună cu centrul de presiune al lui P_m se vor găsi pe aceeași direcțiune m.

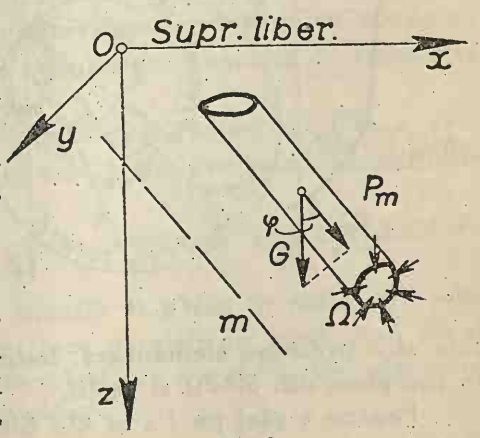


Fig. 43

Rezumând, vom putea scrie:

$$P_x = \varpi \int z\, d\Omega_x = \varpi\, z_x\, \Omega_x$$

$$P_y = \varpi \int z\, d\Omega_y = \varpi\, z_y\, \Omega_y$$

$$P_z = \varpi \int z\, d\Omega_z = \varpi\, z_z\, \Omega_z$$

$$P_m = \varpi \int z\, d\Omega_m = \varpi \int z' d\Omega_m \cdot \cos\varphi = \varpi\, z'_m\, \Omega_m \cos\varphi\,,$$

unde z_x şi z_y sunt cotele baricentrelor lui Ω_x şi Ω_z, reprezentând mediile ordonatelor verticale ale acestor suprafeţe deasemenea verticale, iar z_z şi z'_m nişte înălţimi cari, fără a fi ordonatele unor baricentre, reprezintă şi ele mediile ordonatelor verticale z sau oblice z' (după direcţia m) ale suprafeţei Ω, în sensul că $z_z\,\Omega_z$ şi $z_m\Omega_m$ exprimă volumele cilindrilor menţionaţi G şi G'.

d) *Reprezentarea geometrică a rezultantelor după diferite direcţiuni.*

Să luăm (Fig. 44) axele Ox şi Oy pe suprafaţa liberă, axa Oz verticală descendentă şi fie m o altă direcţie oarecare.

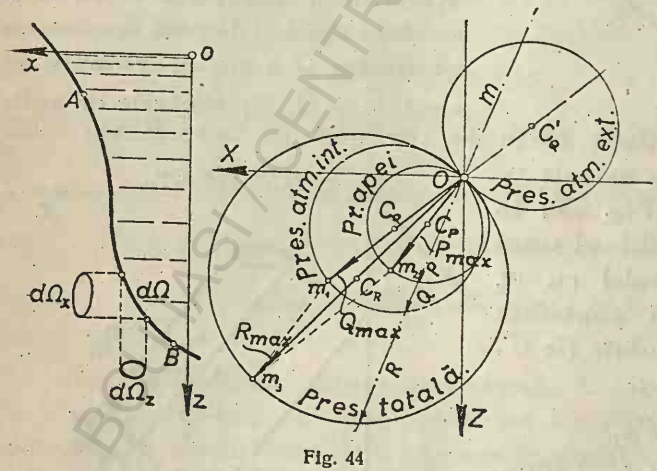


Fig. 44

Fie R_x, R_y, R_z, R_m rezultantele respective ale presiunilor, exercitate pe suprafaţa Ω (limitată de conturul AB), şi compuse, fiecare, din două părţi, una P şi alta Q, cu indicele aferent, datorite respectiv presiunilor lichidului singur şi presiunii atmosferice, după cum şi o presiune elementară, îndreptată după normala peretelui, se compune din $\varpi z\, d\Omega$ şi $p_a\, d\Omega$.

Pentru a găsi pe P_m şi Q_m (deducând apoi $R_m = P_m + Q_m$),

proiectăm pe direcția m presiunile elementare respective, prealabil descompuse după cele trei axe.

Vom obține:

$$P_m = P_x \cos \sphericalangle (m, x) + P_y \cos \sphericalangle (m, y) + P_z \cos \sphericalangle (m, z)$$

$$Q_m = p_a \Omega_x \cos \sphericalangle (m, x) + p_a \Omega_y \cos \sphericalangle (m, y) + p_a \Omega_z \cos \sphericalangle (m, z) = p_a \Omega_m,$$

P_m și Q_m apărând astfel ca proiecțiile rezultantelor generale de translație

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

și

$$Q = p_a \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2},$$

cari evident sunt invariante, adică independente de alegerea axelor.

Așa dar, dacă dintr'un punct O, luat ca pol, ducem în direcția m un vector de valoare scalară P_m sau Q_m, extremitatea lui se va găsi pe o sferă, având ca diametru rezultanta de translație $\overline{P}$, respectiv $\overline{Q}$.

Fig. 44 corespunde cazului (ales pentru claritate) unei suprafețe de perete simetrice în raport cu xOz, luat ca plan al figurei.

Din cele de mai sus rezultă că și $\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$ este invariant, putând fi considerat ca valoarea scalară a unui vector $\overline{\Omega}$, rezultanta vectorilor elementari $d\overline{\Omega}$, orientați după normalele suprafețelor elementare respective.

Vectorii $\overline{P}$ și $\overline{Q} = p_a \overline{\Omega}$ sunt însemnați pe figură prin valorile scalare: P_{max} și Q_{max}, ale diametrelor Om_1 și Om_2 ale celor două sfere menționate (Fig. 44), cu centrele respective C_P, C_Q. Adunarea scalară $R_m = P_m + Q_m$ corespunde evident cu adunarea vectorială $\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$, $\overline{R}$ fiind rezultanta generală de translație a presiunilor efective.

Rezultă că sfera, construită pe suma geometrică Om_3 a vectorilor Om_1 și On_2 ca diametru, este locul geometric al extremității vectorului $\overline{R}_m$.

Presiunea Q_{max} se poate numi: *presiunea normală* datorită atmosferei.

Planul perpendicular pe direcția m_1, dus în polul O, este tangent la sferă, iar pentru direcțiuni paralele cu acest plan Ω_m și Q_n sunt nule (aceeași observație relativ la P_m și R_m din planurile tangente în O la celelalte două sfere).

Sfera simetrică față de planul tangent menționat reprezenta presiunile, după diferite direcții, pe cari le exercită atmosfera pe *fața exterioară a perefelui.*

În cazul când suprafața Ω, plană sau curbă, este simetrică față de un plan vertical, pe care-l putem lua atunci ca plan xOz al figurei, P_y, Q_y, Ω_y, R_y vor fi nule, astfel că centrele sferelor vor cădea în planul xOz, care va tăia sferele după cercuri mari. Figura 44 s'a construit pentru simplitate în această ipoteză.

Aplicația No. 4 La presa hidraulică, întocmită ca în fig. 45, să se găsească presiunea P, exercitată pe pistonul cel mare de diametru D, atunci când asupra pistonului mic de diametru d lucrează forța F, datorită forței Q aplicată la extretatea pârghii, ale cărei brațe rezultă din figură.

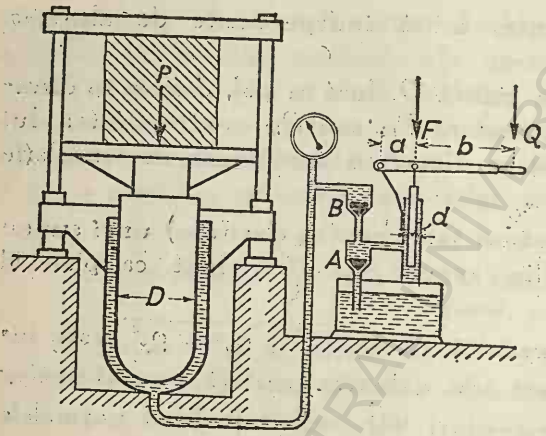


Fig. 45

Soluție. Presiunile totale fiind proporționale cu suprafețele pe cari se exercită (neglijând variația presiunii unitare după cotă, față de presiunile mari din presă) vom avea

$$P = F\frac{D^2}{d^2}.$$

Pe de altă parte

$$Qa = Fb,$$

astfel că

$$P = \frac{aD^2}{bd^2}\,Q.$$

Aplicația Nr. 5. Manometrul lui *Weeren* pentru măsurarea adâncimilor mării se compune dintr'un vas de oțel cu fund dublu (Fig. 46). Fundul superior are o parte mai adâncă purtând o supapă *b*. Spațiul deasupra acestui fund se umple cu apă, care a fiert în prealabil (ca să nu aibă aer), în cantitate de *920 g*, iar spațiul dintre cele două funduri se umple cu mercur. La coborîrea aparatu'ui pe fundul mării presiunea mare a apei pătrunde printr'un mic orificiu *a* în spațiul inferior, silind mercurul să treacă prin supapa *b* în spațiul superior unde comprimă apa dulce.

Câte grame de mercur vor pătrunde astfel în cazul când adâncimea mării ar fi de *9429 m* (*Oceanul Pacific* lângă insulele *Kermadec*) ?

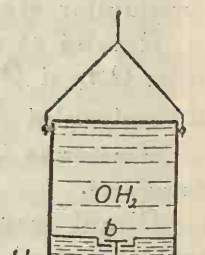


Fig. 46

Soluție. Se admite că raportul densităților apei dulci și apei de mare este *35/36* și $\varkappa = 0{,}00047$ atunci când se ia ca unitate de presiune atmosfera.

Presiunea atmosferică corespunde cu *10,336 m* coloană de apă dulce și deci cu $10{,}336 \times 35/36 = 10{,}045\ m$ coloană de apă de mare. La adâncimea dată, făcând abstracție de va-

riația densității apei, care în realitate crește cu compresiunea, vom avea o presiune de $9429/10015 = 938{,}7$ *atm*, astfel că reducerea de volum a apei dulci din aparat prin pătrunderea mercurului va fi în proporția de: $938{,}7 \times 0{,}000047 = 0{,}044$, fiind deci de $0{,}044 \times 920\ cm^3 = 40{,}48\ cm^3$.

Aceasta va fi și volumul de mercur, care va pătrunde în spațiul superior, și cum *un* cm^3 *mercur* cântărește *13,6 g*, cantitatea aceasta va fi de *550,6 g*.

Aplicația No. 6. Să se găsească la câte atmosfere suprapresiune trebue supus mercurul, pentru a se realiza încălzirea lui cu *1 grad centigrad* dela 0^0 la 1^0 sub volum constant, știind că la 0^0 și presiunea atmosferică normală, coeficientul de dilatație al mercurului este $\alpha = 0{,}00018$ iar coeficientul său de compresibilitate $\varkappa = 0{,}0000039$.

Răspuns. Se caută cu alte cuvinte *coeficientul de compresibilitate* $\frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial \theta}$, sau creșterea proporțională a presiunii (măsurată în atmosfere) sub volum constant pentru ridicarea temperaturii dela 0^0 la 1^0. Ori, acest coeficient este legat de coeficientul de dilatație α sub presiune constantă și de coeficientul de compresibilitate $\varkappa$ sub temperatură constantă prin următoarea relație, dată de diferențierea ecuației fizice $p = p\,(v, \theta)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \theta}\, d\theta + \frac{\partial p}{\partial v}\, dv.$$

Intradevăr pentru o schimbare de stare cu $dp = 0$, (presiune constantă) raportul dintre cele două diferențiale dv *și* $d\theta$ se poate exprima prin $\frac{\partial v}{\partial \theta}$, sau prin $\frac{\partial \theta}{\partial v}$ (ceea ce se poate evident pentru orice pereche de diferențiale și în caz de mai mult de cât 3 variabile, dacă toate celelalte diferențiale se iau egale cu zero) având în vedere că și $v = v\ (\theta, p)$ sau $\theta = \theta(v, p)$.

Vom avea în consecință (orice derivată parțială presupunând menținerea constantă a celei de a treia variabile):

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial \theta}}{\dfrac{\partial v}{\partial p}}$$

sau

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{p_0}\,\frac{\dfrac{1}{v_0}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}}{\dfrac{1}{v_0}\dfrac{\partial v}{\partial p}} = \frac{1}{p_0}\frac{\alpha}{\varkappa} = \frac{1}{p_0}\,\frac{0{,}00018}{0{,}0000039}.$$

Aplicația No. 7. Latura superioară a unei stavile dreptunghiulare de *4 m* înălțime și *3 m* lărgime se găsește în planul de apă. A se găsi presiunea pe stavilă și centrul de presiune, precum și presiunea pe unitatea de suprafață la fund.

Răspuns. Presiunea medie pe stavilă este egală cu presiunea din centrul de greutate al stavilei, care se găsește la $2\,m$ adâncime. Ea este de $0{,}2\,kg/cm^2$ sau 2 *tone*$/m^2$. Presiunea totală va fi, așa dar, de: $3 \times 4 \times 2 = 24$ *tone*. Centrul de presiune va fi la $2/3 \times 4 = 2{,}666\,m$ adâncime.

Presiunea unitară la fund va fi de:

$$p = 0.4\ kg/cm^2 = 4000\ kg/m^2\ .$$

Aplicația Nr. 8 Fie un dig de inundație, reprezentat pe figură în secție transversală, dig menit să apere un teren situat mai jos decât cota maximă a apelor. A se calcula componentele presiunii hidrostatice pe metru liniar de d.g.

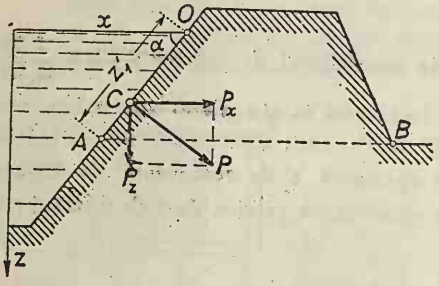


Fig. 47

Răspuns. Taluzele făcându-se pe cât posibil plane, putem aplica formulele pereților plani. Deformația cea mai de temut ar fi lunecarea masei de pământ după secția AB (Fig. 47) sub acțiunea componentei orizontale a presiunii, exercitată pe OA.

La aceasta se opune frecarea, care depinde de forțele normale, adică de greutatea masei de pământ plus componenta verticală a presiunii pe OA.

E necesar deci a cunoaște ambele aceste componente.

Dacă lungimea digului este l, avem:

$$P = \varpi\, \Omega\, z_g = \varpi\, \Omega\, z'_g \sin\alpha$$

cu $\Omega = l\, z'_1$ și $z'_g = \dfrac{z'_1}{2}$.

Pentru o porțiune de lungime $l = 1$, $P = \dfrac{\varpi z'^2_1}{2} \Omega \sin\alpha$.

Componentele lui P sunt: $P_x = P \sin\alpha$ și $P_z = P \cos\alpha$.

Pentru centrul de presiune avem

$$z'_C = \frac{2}{3} z'_1 .$$

Aplicația No. 9. Dacă avem un perete ce desparte două mase de lichid în repaos cu nivele diferite (Fig. 48), cele două rezultante normale de o parte și de alta a peretelui se calculează ca mai sus, compunându-se apoi după regula de compunere a forțelor paralele.

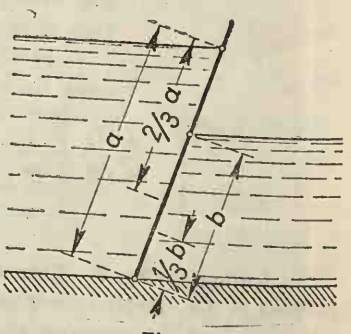
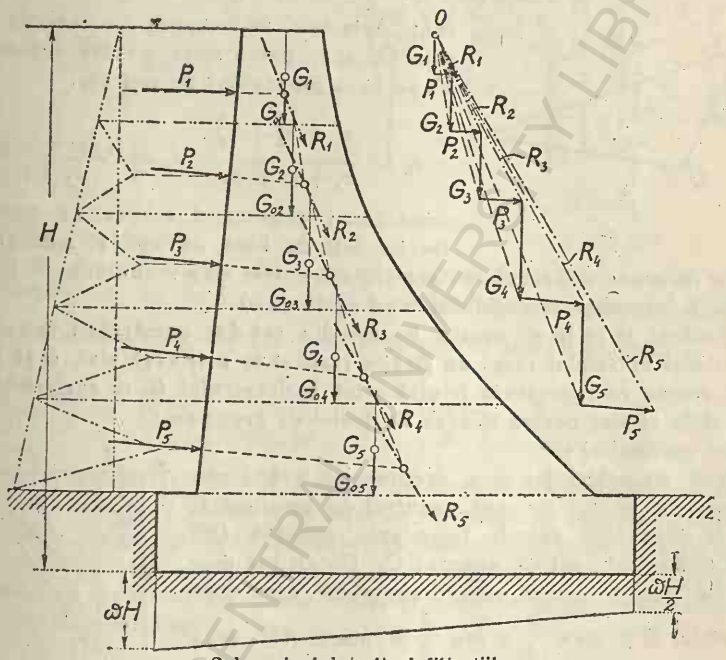


Fig. 48

Aplicația No. 10 Să se traseze funicularul, care dă rezultantele $R_1, \ldots R_5$ pe diversele secțiuni orizontale ale unui baraj, provenind din greutățile diverselor blocuri $G_{01}, \ldots G_{05}$, aplicate în baricentrele respective $G_1, \ldots G_5$ ale acestora și din presiunile hidrostatice parțiale $P_1, \ldots P_5$, aplicate în centrele de presiune respective.

Soluție. Aceste din urmă centre se pot găsi, ducând orizontala d n punctul de întâlnire al dreptelor cari, la fiecare trapez de presiune, leagă vârfurile de pe una din laturile neparalele cu punctele de împărțire în trei a celeilalte laturi neparalele*)

Funicularul se trasează construind mai întâiu poligonul de forțe (Fig. 49



Subpresiuni datorite infiltrațiilor.

Fig. 49

dreapta) și ducând, cu începere dela baricentrul G_1, succesiv paralele la razele duse din origina poligonului O, luat ca pol, la celelalte vârfuri ale acestui poligon.

Subpresiunile datorite infiltrațiilor se scad din eforturile trapezului de compresiuni pe bază. In figură s'a presupus, după apreciere, că subpresiunea în aval scade la jumătatea valorei din amonte.

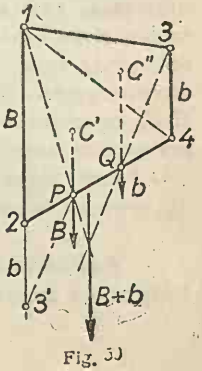


Fig. 50

*) Intradevăr diagonala 1 4 împarte trapezul în două triunghiuri, în ale căror baricentre C' și C'', la treimile distanței dintre baze, aplicăm forțe paralele cu bazele și proporționale cu lungimile acestora B și b. Pentru a găsi rezultanta acestor forțe, care va trece prin centrul căutat al trapezului, construim poligonul de forțe 1, 2, 3′ și, luând P ca pol, trasăm funicularul următor, care își are laturile paralele cu $P1$, $P2$, $P3'$: $1P$, PQ, $Q3$. Intersecția $1P$ cu $3Q$ va fi evident pe rezulultanta $B+b$, care trece prin baricentrul trapezului.

Aplicația No. 11. Să se găsească centrul de presiune al unei părți de perete vertical de formă triunghiulară, la care mijlocurile laturilor se găsesc la cotele z_1, z_2, z_3, sub nivelul apei. Dacă peretele este înclinat cotele vor fi înlocuite prin ordonatele aceloraşi puncte față de urma planului pe planul de apă, luată ca axă x.

Soluție. Se știe că, dacă în acele mijlocuri concentrăm câte 1/3 din suprafața triunghiului, masele astfel concentrate au același baricentru, același moment de inerție și aceleași momente centrifuge față de orice axă, respectiv față de orice pereche de axe rectangulare din plan.

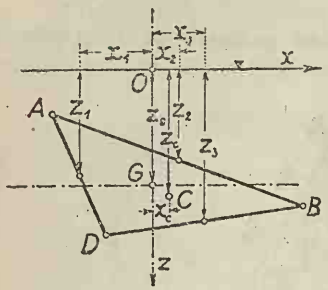


Fig. 51.

Vom avea deci $z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ și dacă x_1, x_2, x_3 sunt distanțele mijlocurilor de verticala ce trece prin G, vom putea scrie pentru coordonatele lui C, pe baza propoziției de mai sus,

$$z_c = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_1 + z_2 + z_3} \qquad x_c = \frac{z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3}{z_1 + z_2 + z_3},$$

numărătorii exprimând respectiv: momentul de inerție față de linia de apă și momentul centrifug față de axele rectangulare Oxz ale celor trei mase, concentrate, luate fiecare egală cu 1 (suprafața triunghiului fiind egală cu 3).

Evident că în felul acesta fiecare din cei doi numărători va exprima totodată triplul pătratului razei de giratie respective a triunghiului, după cum și numitorul comun va reprezenta triplul cotei baricentrului G, în conformitate cu formulele date în text pentru aflarea centrului de presiune C.

Cazuri particulare:

1) Dacă triunghiul dat este dreptunghic, având una din catete în planul de apă, centrul de presiune C poate fi găsit fără calcul. Intradevăr mediana DM trebue evident să conțină punctul C. Un alt loc geometric al acestui punct este dreapta BN, care duce dela vârful B la cota $\frac{2}{3}z$ sau $\frac{2}{3}$ a laturei AD, ceea ce se vede imediat dacă imaginăm triunghiul împărțit în fâșii elementare verticale cari, fiind (cu aproximația unui infinit mic de ordin superior) dreptunghiulare, își au centrele lor de presiune pe numita dreaptă.

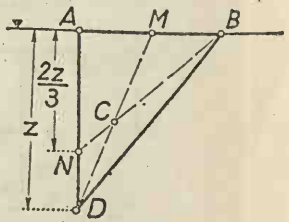


Fig. 52

2) Putem trece ușor dela cazul precedent la cazul când cateta orizontală a triunghiului s'ar găsi la partea inferioară, acesta constituind diferența între un dreptunghiu și un triunghiu din categoria precedentă. C_1 fiind centrul de presiune al dreptunghiului și C_2 al triunghiului complementar, C căutat se va găsi la intersecția dreptei C_2C_1 cu mediana AM, care, precum s'a menționat mai sus este de asemenea un loc geometric al lui C.

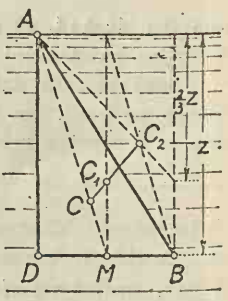


Fig. 53

O figură plană poligonală poate fi tratată ușor, fiind descompusă în triunghiuri.

Aplicația No. 12. Porțile duble ale ecluselor se așează, în secțiune orizontală, cu un unghiu α de înclinație față de axa eclusei, pentru a se asigura prin

presiunea apei o bună închidere. Să găsim unghiul α cel mai favorabil din punct de vedere al rezistenței porților.

Soluție. Dacă P este presiunea, exercitată de apa din amonte pe una din porți (cu adâncimea de apă h), din cele două presiuni $P/2$, transmise la cele două margini verticale ale porței, ce servă de reazeme, aceea din axa eclusei va da în cealaltă poartă o componentă *axială* sau de *flambaj* F, rezultând din poligonul forțelor ce-și fac echilibru pe marginea verticală comună (Fig. 54):

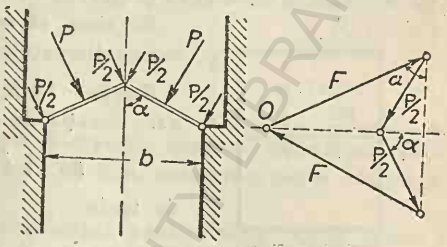


Fig. 54

$$F = \frac{P}{2} tg\,\alpha = \frac{\varpi b h^2}{8 \cos \alpha}$$

căci

$$\frac{P}{2} = \frac{\varpi b}{4 \sin \alpha} \frac{h^2}{2},$$

b fiind lărgimea deschiderii.

Eforturile desvoltate în poartă, considerată ca o grindă orizontală cu secțiune dreptunghiulară, se datoresc unei sarcini orizontale, uniform repartizată, $p = \varpi \frac{h^2}{2}$ și forței axiale F, astfel că vom avea pentru efortul maxim:

$$\sigma = \frac{F}{S} + \frac{Mu}{I} = \frac{\varpi b h^2}{8 S \cos \alpha} + \frac{\varpi b^2 h^2}{64 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{u}{I} = \frac{\varpi b h^2}{8} \left[\frac{1}{S \cos \alpha} + \frac{b}{8 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{u}{I} \right],$$

în care S este secțiunea iar $I/u = W$ modulul de rezistență al secțiunei porții.

În practică grosimea $e = 2u$ și modulul de rezistență se proporționează variației sarcinei, care crește de sus în jos. Totuși să presupunem teoretic că am adoptat o grosime uniformă e, ceeace ar fi practic pentru h relativ mic. În cazul acesta (calculul nu are decât un interes teoretic) pentru o secțiune dreptunghiulară $S = he$, $W = he^2/6$, vom avea:

$$\sigma = \frac{\varpi b h}{8 e} \left[\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{3}{4 \sin^2 \alpha} \frac{b}{e} \right].$$

Pentru h și b date iar S și W alese, rezultă că σmin corespunde unui unghiu α, care satisface ecuația:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0 = \frac{\varpi b h^2}{8} \left[\frac{\sin \alpha}{S \cos^2 \alpha} - \frac{b \cos \alpha}{4 W \sin^3 \alpha} \right]$$

sau, în cazul secțiunei dreptunghiulare:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{3 \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha} \frac{b}{e} \quad \text{adică} \quad \frac{2 \sin^4 \alpha}{3 \cos^3 \alpha} = \frac{b}{e}.$$

Înlocuind pe b/e prin această expresie în valoarea lui σ, găsim valoarea optimă

$$\sigma_0 = \frac{\varpi h}{12} tg^4 \alpha \left(1 + \frac{1}{2} tg^2 \alpha \right),$$

de unde, dacă se introduce maximum de σ admisibil, se poate scoate α optim, găsindu-se apoi e din valoarea raportului b/e.

Aplicația Nr. 13 Într'un compartiment de siloz (Fig. 55) se găsește depozitat grâu pe o înălțime h. Admitem că, la orice plan orizontal, presiunea laterală p_1 exercitată pe perete, către presiunea p, exercitată vertical în o secțiune orizontală a depozitului de grâu, are un raport constant m cunoscut. Fie f coeficientul de frecare între grâu și pereții compartimentului.

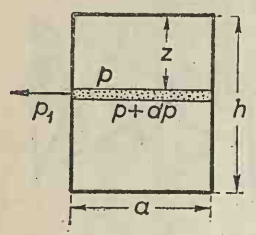


Fig. 55

Se cere să se găsească presiunea totală p pe fundul compartimentului, care are forma unui pătrat de latură a.

Soluție. Să luăm un strat orizontal de grâu de grosime dz. Ecuația de echilibru dă:

$$pa^2 + \varpi a^2\, dz = (p + dp)\, a^2 + f p_1 4a\, dz,$$

de unde

$$dp = \varpi\, dz \left(1 - \frac{4fm}{\varpi a}\, p\right)$$

$$p = \frac{\varpi a}{4fm}\left(1 - e^{-\frac{4fm}{a}z}\right),$$

punând în loc de z înălțimea totală h obținem presiunea pe fund.

Aplicația Nr. 14. La un lagăr-pivot hidraulic, osia solicitată de o împingere axială F, reazemă pe apă sub o presiune p, care echilibrează acea împingere. Etanșarea osii pe o lungime h se face prin o garnitură de piele, așezată într'o escavație inelară în jurul osii și aplicată pe osie prin presiunea hidraulică menționată, care pătrunde în escavație cu aproximativ aceeași intensitate (Fig. 56). Să calculăm momentul forțelor de frecare produsă de garnitură asupra osii în funcție de F, h și coeficientul de frecare f între piele și osie.

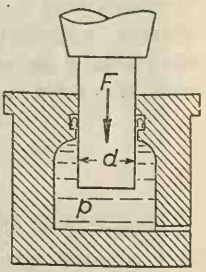


Fig. 56

Soluție. Avem mai întâiu, ținând seama că frecarea în sens vertical între garnitură și osie este insensibilă grație învârtirei:

$$F = p\,\frac{\pi d^2}{4}.$$

Presiunea laterală din partea garniturei este $p\pi dh$ producând o frecare totală $f\pi p\, dh$, care dă un moment în jurul axei de rotație

$$M = f p \pi d h \frac{d}{2} = 2 f h F,$$

deci independent de d.

Aplicația No 15 Sub pistonul unui acumulator hidraulic (Fig. 57) cu diametrul $d = 20\ cm$, avem apă presată la $p = 35\ atm$. Pistonul ridicându-se cu $h = 2{,}4\ m$, se cere a se găsi presiunea pe piston la finele cursei, socotind că la garnitura g ar fi o pierdere de efort de 3% din cauza frecării.

Soluție. Vom avea

$$P = \frac{\pi d^2}{4}\left(p - \varpi h\right)\ \left(1 - 0{,}03\right).$$

Luând ca unități *cm* și *kg*, găsim, pentru $d = 20$, $h = 240$ și $\varpi = 0{,}001$, presiunea $P = 10588$ *kg*.

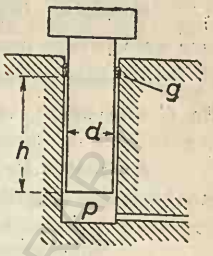


Fig. 57

Aplicația No. 16. La un acumulator hidraulic, pistonul este exact contrabalansat de o greutate legată cu pistonul prin un lanț, care trece peste doi scripeți (Fig. 58),

Ce greutate q pe metru trebue să aibe lanțul, pentru ca în timpul cursei să compenseze variațiile de presiune, astfel încât contrabalansarea să se mențină?

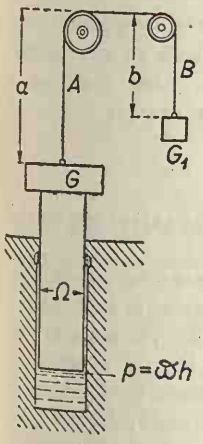


Fig. 58

Soluție. Este evident că, la o cursă de ridicare dh, presiunea pe piston scade cu $\varpi\,\Omega\,dh$, astfel că tensiunea ramurei A a lanțului crește cu aceeași cantitate, minus greutatea $q\,dh$ a porțiunei cu care s'a scurtat lanțul. Cum pe de altă parte tensiunea ramurei B a lanțului va crește cu $q\,dh$, compensarea cere:

$$\varpi\Omega\,dh - q\,dh = q\,dh \quad \text{sau} \quad q = \frac{\varpi\,\Omega}{2}.$$

În poziția inițială, când pistonul este complet scoborît, dacă înălțimea piezometrică la bază este h, în care caz presiunea de jos în sus este $\Omega h \varpi$, lungimile inițiale a și b ale ramurilor de lanț vor fi astfel, ca diferența lor $a - b$, prin greutatea ei $q(a-b)$ plus excesul de greutate $G - G_1$ a pistonului față de contragreutate, să echilibreze presiunea în chestiune. Vom avea relația:

$$q(a-b) + G - G_1 = \varpi\Omega h = 2qh.$$

În cazul particular $G = G_1$ va trebui să avem $a - b = 2h$.

Aplicația Nr. 17. Dacă o arie plană AB se deplasează în interiorul unui lichid, prin rotație în jurul intersecției O a planului ei cu planul de apă, centrul ei de presiune C descrie un arc de cerc cu centrul pe axa de învârtire.

Intradevăr, se demonstrează ușor că z'_c este independent de înclinarea ariei și deci constant.

Dacă aceeași arie AB (Fig. 59) se învârtește în jurul axei paralele (orizontale) ce trece prin centrul ei de greutate G, să se arate că centrul ei de presiune C descrie o circumferință, așezată în planul perpendicular ariei și având punctul său cel mai înalt (pentru poziția orizontală) în centrul de greutate G al ariei, iar punctul cel mai jos în centrul de presiune D al poziției verticale.

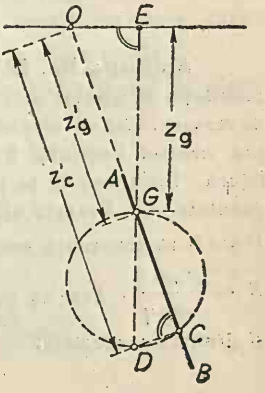


Fig. 59

Răspuns. Demonstrația se face plecând dela expresia $z'_c - z'_g = r'^2/z'_g$, care este invers proporțională cu z'_g, întrucât r' este constant. Vom avea $GD/GC = z'_g/z_g$, ceeace arată că triunghiurile GEO și GDC sunt asemenea și deci unghiul din C este drept, vârful său C descriind o circumferință pe GD ca diametru.

Aplicația Nr. 18 Un perete AB, care desparte un canal superior de un canal inferior (Fig 60), urmează a fi împărțit prin n grinzișoare orizontale în panouri, cari să primească aceeași presiune Să se construească grafic poziția grinzilor. Diferența de nivel este h.

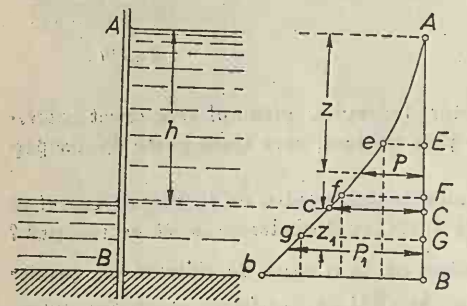


Fig. 60

Răspuns: Până la orice adâncime z deasupra nivelului inferior C, avem o presiune totală

$$P = \frac{1}{2}\,\varpi\, l\, z^2,$$

unde l este lungimea peretelui Curba lui P este o parabolă cu axa orizontală și vârful în A. Dela C cu cota h până la B curba presiunei totale se continuă tangențial prin dreapta

$$P_1 = \frac{1}{2}\,\varpi\, l\, h^2 + \varpi\, l\, h\, z_1,$$

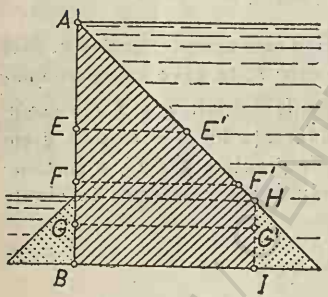


Fig. 61

în care z_1 este cota punctului curent sub nivelul inferior.

Dacă împărțim linia bB, care reprezintă presiunea totală pe întregul perete, în n părți egale — în figură s'a împărțit în 4 —, se obțin urmele liniilor despărțitoare E, F, G ale peretelui în fășii ce suportă o egală presiune. Centrele de presiune ale acestor fășii se obțin, ducând perpendiculare pe AB din centrele de greutate ale ariilor egale corespunzătoare, în care se împarte aria diagramei presiunilor (Fig. 61) $ABIH$. In dreptul acestor baricentre se vor așeza grinzișoarele.

Aplicația No. 19. La baraje se întrebuințează uneori, contra pericolului de inundație al apelor mari, clape mobile, cari în mod automat regulează debitul de deversare, ținând nivelul din amonte constant, adică la aceeași înălțime H deasupra crestei barajului fix. O asemenea clapă (Fig. 62) poate fi instalată ca în figură, fiind mobilă în jurul unei axe orizontale O și echilibrată prin o contragreutate P. Aceasta alunecă pe o cale trasată astfel, încât componenta tangențială $P \sin \beta$ să transmită asupra clapei, prin intermediul unui cablu legat în A, o forță $S = \frac{P \sin \beta}{\cos \gamma}$, care să contrabalanseze în fiecare moment presiunea apei pe clapă și greutatea acesteia.

Cablul fiind în A ghidat astfel ca să fie mereu normal pe clapă, și ținând seamă că H este prin ipoteză constant și egal cu OA, întrucât pentru un debit nul — în poziție verticală — clapa trebue să-și aibă pragul în planul apei, condiția echilibrului va fi:

$$SH = G\,a\,\cos\alpha + Mb,$$

unde G este greutatea clapei, M momentul presiunei apei în jurul lui O pentru un metru liniar, iar b lărgimea clapei.

Pentru momentul presiunei, admițând că repartiția presiunilor este aproximativ hidrostatică — de fapt, după cum vom vedea în hidrodinamică, presiunile

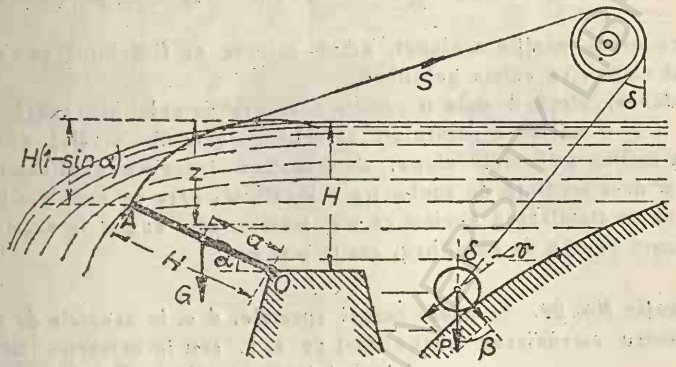


Fig. 62

reale sunt mai mici de cât în hidrostatică, din cauză că moleculele de lângă clapă sunt și ele animate de mișcare, — vom avea:

$$M = \varpi\, b \int_{H(1-\sin\alpha)}^{H} \frac{z\,dz}{\sin\alpha}\,\frac{H-z}{\sin\alpha} = \varpi\,\frac{bH^3}{6}\,(3-2\,\sin\alpha),$$

de unde, condiția pe care va trebui s'o satisfacă calea, ia forma

$$S = \frac{1}{H}\left[G\,a\,\cos\alpha + \varpi\,\frac{bH^3}{6}\,(3-2\,\sin\alpha)\right] = \frac{P\sin\beta}{\cos\gamma}.$$

Să găsim ecuația căii în coordonate polare.

Soluție. Fie r lungimea firului inferior, măsurat dela punctul lui de tangență de pe scripete, presupus fix — ceea ce se poate admite cu mare aproximație — și luat ca pol, δ unghiul pe care acel fir îl formează cu verticala.

Fie r_0 și δ_0 valorile inițiale, arbitrar alese, cari fixează punctul de plecare al căii, corespunzător valorei $\alpha = 0$.

Se vede ușor că:

$$tg\,\gamma = \frac{r\,d\delta}{dr} \quad \text{și} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - (\delta + \gamma),$$

de unde:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\gamma} = \cos\delta - tg\,\gamma\,\sin\delta = \cos\delta - r\,\frac{d\delta}{dr}\,\sin\delta.$$

Pe de altă parte avem: $H\,d\alpha = dr$, de unde $\alpha = \frac{r - r_0}{H}$.

Substituind, în ecuația de echilibru stabilită mai sus, aceste expresii ale lui $\sin\beta/\cos\gamma$ și α, găsim ecuația diferențială a curbei în coordonatele r și δ:

$$P(\cos\delta\,dr - r\,\sin\delta\,d\delta) = G\,a\cos\frac{r-r_0}{H}\frac{dr}{H} + \frac{\varpi\,bH^2}{6}\left(3\,dr - 2\,\sin\frac{r-r_0}{H}\,dr\right).$$

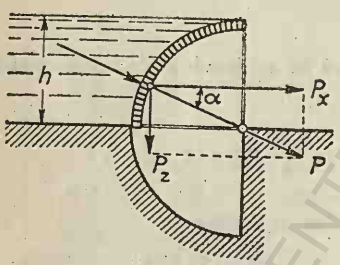
Integrarea dă imediat

$$P(r\cos\delta - r_0\cos\delta_0) = G\,a\,\sin\frac{r-r_0}{H} + \frac{\varpi\,bH^2}{2}(r-r_0) - \frac{\varpi\,bH^3}{3}\left(1 - \cos\frac{r-r_0}{H}\right).$$

Pentru orice poziție a clapei, adică oricare ar fi debitul ce s'ar deversa peste pragul clapei, va exista echilibru.

Intradevăr, plecând dela o poziție oarecare de echilibru, dacă intervine o schimbare, d. e. o mărire a debitului, care tinde să înalțe nivelul, excedentul de presiune va înclina mai mult clapa, determinând trecerea unui debit mai mare peste prag și deci tendința de scobortre a nivelului, care în noua poziție de echilibru trebue să se stabilească același ca mai înainte, căci numai la acest nivel vom avea satisfăcută relația de echilibru, găsită mai sus.

Aplicația No. 20. In unele cazuri speciale, d. e. la canalele de plutire, sau de priză pentru amenajarea unei căderi de apă, sau în camerele turbinelor, se întrebuințează *stavile în formă de segment cilindric*, cari se pot scobori sub radier sau ridica deasupra nivelului apei.



Fg. 63

Dacă se așează axa de învârtire în axa cilindrului, presiunile fiind concentrice, rezultanta lor trece prin axa de învârtire, astfel că la manevrarea stavilei nu e de învins decât momentul greutății proprii și al frecării cu axa. Să se găsească presiunea pe stavilă și centrul ei de aplicație.

Răspuns. Unghiul de înclinare al rezultantei este dat de: $tg\,\alpha = P_z/P_x$ și, dacă segmentul este de 90^0:

$$tg\,\alpha = \frac{\varpi\,h^2(1-\pi/4)}{\varpi\,h^2/2} = 2 - \frac{\pi}{2} = 0{,}429,$$

de unde $\alpha = 23^0\ 13'\ 10''$, iar presiunea totală exercitată pe axă este:

$$\frac{P_x}{\cos\alpha} = 1{,}08\,\varpi\,\frac{h^2}{2}.$$

Aplicația No. 21. In peretele plan al unui vas se găsește un robinet cilindric ce se poate învârti în jurul axei O, și are o lungime l, iar ca secțiune trei sferturi de cerc (Fig. 64). Să se calculeze pentru cele trei poziții din figură: a) presiunea totală a lichidului pe axă; b) înclinarea δ a acestei rezultante față de un plan orizontal; c) momentul M al rezultantei în raport cu axa robinetului.

Soluție. În poziția I avem: presiunea verticală $P_z = \frac{1}{2}\,\varpi\,\pi r^2 l$ în sus; presiunea orizontală $P_x = 2\varpi\, r l h$ spre stânga, astfel că:

$$P = \frac{1}{2}\,\varpi\, r l \sqrt{\pi^2 r^2 + 16 h^2}.$$

Direcția presiunei trece prin O, oblic în sus spre stânga, având o înclinare față de orizontală: $tg\,\delta = \pi r/4h$.

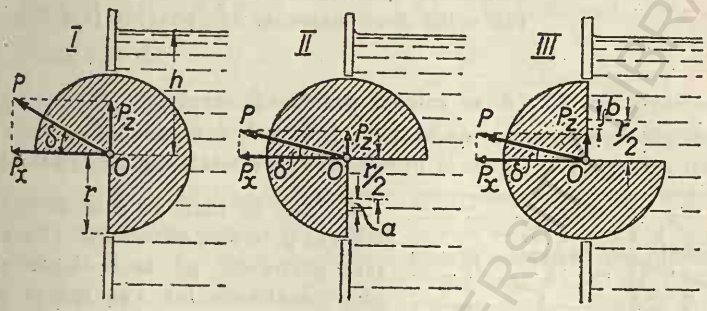


Fig. 64

Momentul căutat este nul.

În pozițiile II și III avem:

$$P_z = \frac{1}{4}\,\varpi\,\pi r^2 l \text{ în sus} \quad \text{și} \quad P_x = 2\varpi\, r l h \text{ spre stânga,}$$

$$P = \frac{1}{4}\,\varpi\, r l \sqrt{\pi^2 r^2 + 64 h^2}.$$

Înclinarea presiunei față de orizontală: $tg\,\delta = \pi r/8h$.

Cum presiunile pe suprafața cilindrică trec prin O, momentul lor e nul: presiunile pe fețele plane, verticală și orizontală, dau un moment rezultant în sensul acelor ceasornicului

$$M = \frac{1}{3}\,\varpi\, r^3 l.$$

Într-adevăr, pentru $l = 1$ avem în cazul II:

$$M = \varpi r\left(h + \frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2} + a\right) - \frac{\varpi h r^2}{2} \text{ cu } a = \frac{1}{12}\frac{r^2}{h + r/2},$$

ar în cazul III

$$M = \frac{\varpi h r^2}{2} - \varpi r\left(h - \frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2} - b\right) \text{ cu } b = \frac{1}{12}\frac{r^2}{h - r/2};$$

ambele expresii se reduc la $\varpi r^3/3$.

Este de notat că acest moment nu depinde de h, fapt explicabil, căci, la o creștere sau micșorare a lui h, presiunile de pe cele două fețe egale cresc sau descresc cu cantități egale, uniform repartizate, cari dau momente antagoniste ce se distrug mutual.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Faptul că momentele de la II și III trebue să fie egale se poate învedera fără calcul, în modul următor: luând d. e. secțiunea simetrică — față de verticala centrului — a robinetului din poziția III și juxtapunând-o secțiunei din II, rezultă o figură închisă, pe care se exercită totalitatea presiunilor din ambele poziții, cu singura diferență că momentul acelora din III se găsește răsturnat.

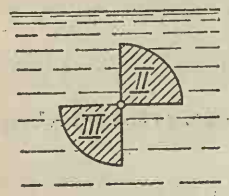


Fig. 65

Ori, figura astfel obținută fiind complet închisă, știm că momentul rezultant va fi nul, de unde rezultă echilibrarea celor două momente componente (Fig. 65).

Aplicația No. 22. A se calcula presiunea rezultantă P pe suprafața laterală a unui cilindru circular, de secțiune $\Omega = \pi r^2$, cufundat într'un lichid (Fig. 66), și a se găsi direcția ei precum și punctul unde ea întâlnește axa cilindrului.

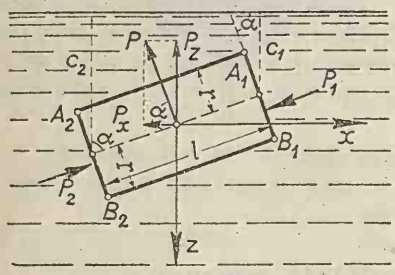


Fig. 66

Soluție. Să luăm ca plan de figură planul vertical prin axa cilindrului. Dacă considerăm presiunile pe toate fețele cilindrului plin, rezultanta lor s'ar reduce la *subpresiunea* *: $\varpi \Omega l$.

Va trebui deci din această rezultantă să scădem vectorial presiunile pe baze spre a afla presiunea căutată P.

Fie P_1 și P_2 presiunile pe baze, considerate ca pozitive; G centrul de greutate al cilindrului; G_x și G_z axele de proecție din planul figurei, respectiv orizontală spre dreapta și verticală în jos.

Fie c_1, c_2, ordonatele centrelor celor două baze Ω față de planul de apă.

Vom avea (ținând seamă că $c_2 - c_1 = l \cos \alpha$):

$$P_z = -\varpi \Omega l - (P_1 - P_2) \cos \alpha = -\varpi \Omega l + \varpi (c_2 - c_1) \Omega \cos^2 \alpha = -\varpi \Omega l \sin^2 \alpha$$

$$P_x = -(P_2 - P_1) \sin \alpha = -\varpi \Omega l \sin \alpha \cos \alpha$$

$$P_y = 0.$$

Rezultanta va fi: $P = \varpi \Omega l \sin \alpha$, având o direcție perpendiculară pe axa cilindrului, în sensul arătat în figură, căci $P_z / P_x = tg\, \alpha$.

Cum P echilibrează greutatea lichidului ocupat de cilindru și presiunile P_1, P_2, momentul lui P în raport cu G va fi egal și de sens contrar cu suma momentelor lui P_1 și P_2, care sumă, luând semnul pozitiv în sensul acelor unui ceasornic, este

$$P_1 \frac{r^2 \sin \alpha}{4 c_1} - P_2 \frac{r^2 \sin \alpha}{4 c_2}.$$

Cum

$$P_1 = \varpi r^2 \pi c_1 \text{ și } P_2 = \varpi r^2 \pi c_2,$$

*) Vezi Cap. VI, unde se dă la aplicații și o soluție mai simplă.

rezultă că momentul este nul, cu alte cuvinte presiunea rezultantă pe suprafața laterală trece prin G, adică intersectează axa cilindrului la mijloc.

Aplicația Nr. 23. Figura 67 arată o stavilă-segment ABC, care poate închide o galerie sub presiune de lărgime b și înălțime a. Se cere a se determina presiunea totală P asupra stavilei.

Soluție. Presiunea orizontală este:

$$P_x = \varpi\,(z_0 + a/2)\,a\,b.$$

Poziția ei este dată de

$$z_0 + a/2 + e \quad \text{cu } e = \frac{a^2}{12\,(z_0 + a/2)}.$$

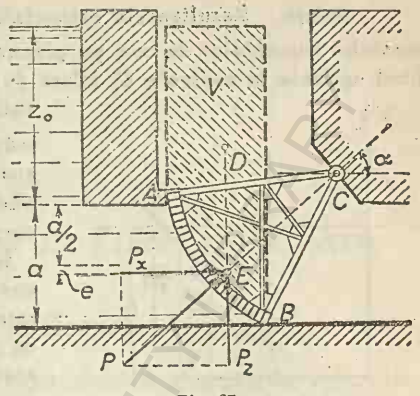


Fig. 67

Presiunea verticală este îndreptată în sus și are ca valoare: $P_z = \varpi V$, unde V este volumul hașurat; ea trece prin centrul D al acelui volum. Intersecția E a celor două presiuni determină împreună cu C direcția presiunei totale P, a cărei valoare este: $P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$.

Dacă însă calculăm unghiul α din relația $tg\,\alpha = P_z / P_x$, nu mai avem nevoie de punctul D pentru a trasa din C linia de acțiune a presiunii totale.

Aplicația Nr. 24. A se găsi presiunile P_x și P_z asupra unui semicilindru circular de lungime l, care formează o parte a peretelui, conform figurei.

Soluție. Vom avea

$$P_z = \varpi\, 2\,r\,l\,z_G$$

$$z_x = z_G + \frac{(2r)^2}{12\,z_G} = z_G + \frac{r^2}{3\,z_G},$$

iar pentru rezultanta verticală (egală aici cu subpresiunea)

$$P_z = \varpi\,\frac{\pi\,r^2}{2}\,l,$$

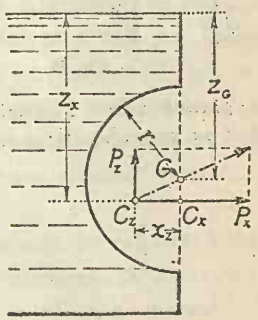


Fig. 68

cu centrul de presiune în baricentrul C_z al semicercului secțiunii de mijloc. Ori, acest baricentru se găsește la stânga lui G la distanța $X_z = \frac{4r}{3\pi}$.

Cum presiunile elementare sunt normale pe cilindru, rezultanta lor generală $\sqrt{P_x^2 + P_z^2}$ va trece prin centrul G. Și într-adevăr, momentul rezultant al celor două presiuni P_x și P_z față de acest centru este nul, căci

$$P_x\,(z_x - z_G) = P_z\,X_z,$$

după cum se verifică ușor:

$$\frac{P_x}{P_z} = \frac{4\,z_G}{\pi r} = \frac{X_z}{z_x - z_G}.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITARĂ

Aplicația No. 25 Să se studieze presiunile pe un zid de cheiu conform figurei, având forma unui sfert de trunchiu de con.

Soluție. Rezultantele orizontale P_x și P_y pe proiecțiunile trapezoidale ale mantalei trunchiului de con pe planurile ortogonale yOz și xOz sunt evident egale, fiind aplicate în centrele C, aflate după regula arătată mai sus. Rezultanta verticală P_z este dată de greutatea corpului lichid, mărginit între mantaua tron-conică, planul de apă și suprafața cilindrică verticală ABD; punctul ei de aplicație este baricentrul acestui corp, de care însă nu vom avea nevoie.

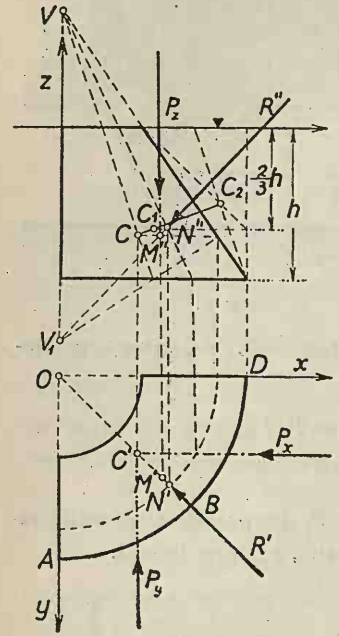


Fig. 69

Intradevăr, dacă ne închipuim suprafața tronconică împărțită în trapeze elementare prin generatrice plecând din vârful V al conului, centrele de presiune ale acestor trapeze se vor găsi la aceeași cotă cu C, iar presiunile elementare vor fi perpendiculare pe trapezele elementare respective. Aceste presiuni vor forma un con ortogonal primului, având vârful în V_1. Presiunile verticale pe aceste trapeze elementare formează la rândul lor un sfert de cilindru, a cărui directrice este cadranul trasat punctat în plan. Baricentrul M' al acestui cadran este centrul de aplicație al lui P_z. Ducând din M' o verticală, aceasta va tăia orizontala prin C în M'', pe unde va trece rezultanta generală R, căci P_x și P_y vor da o rezultantă R' (care va trece prin C), întâlnindu-se cu P_z în (M'', M').

Rezultă că, $V_1 M''$ va da proecția R'' a lui R pe planul xOz. Punctul N', unde R' întâlnește cadranul punctat, reprezintă urma lui R pe suprafața tron-conică și prin proiectare verticală găsim poziția N'' pe R''

CAP. VI

CORPURI CUFUNDATE INTR'UN FLUID IN REPAOS.

1. Presiune uniformă.

Riguros vobind nici un fluid ponderabil nu poate exercita o presiune *uniformă* pe întreaga suprafaţă a unui corp cufundat în el, deoarece presiunile cresc cu adâncimea. Cum însă variaţia presiunei se poate neglija la gaze, atunci când e vorba de dimensiuni verticale reduse, uniformitatea presiunei se poate admite ca o aproximaţie.

Asupra unei suprafeţe închise, de exemplu suprafaţa totală a unui corp, supusă la o presiune p riguros *uniformă*, presiunile s'ar echilibra, adică rezultanta lor ar fi nulă. Intradevăr, împărţind volumul, mărginit de suprafaţă, în prisme elementare paralele cu o axă oarecare x (Fig. 70), presiunile $p\,d\Omega$ şi $p\,d\Omega'$ pe bazele elementare ale oricăreia din prisme, ar avea ca proecţii pe axă $p\,d\Omega_x$ şi $-pd\,\Omega_x$, anulându-se reciproc. Aşa dar, rezultanta după direcţia x ar fi nulă. Acelaşi lucru se întâmplă pentru orice altă direcţie y sau z şi deci rezultanta generală (şi cuplul rezultant) ar fi zero.

Corolar. De aci rezultă că, dacă o suprafaţă neregulată este limitată de o arie plană, rezultanta presiunei uniforme p, exercitată pe suprafaţă, va fi egală cu produsul dintre p şi aria plană, iar centrul de presiune respectiv se va găsi pe normala la plan, dusă în baricentrul ariei plane.

2. Presiuni rezultante ale fluidului înconjurător.

a) *Rezultante orizontale nule.*

La un corp, aşezat în total sau în parte într'un gaz sau un lichid, rezultanta după o direcţie oarecare orizontală este riguros nulă. Intradevăr, împărţind ca mai sus corpul în prisme elementare după o direcţie orizontală, n'avem decât să repetăm raţionamentul

făcut mai sus. Presiunile unitare pe cele două baze elementare $d\Omega$ și $d\Omega'$ ale fiecărei prizme fiind și aci egale între ele (ca fiind la aceași cotă), rezultă că proecțiile pe axa orizontală x, ale celor două presiuni elementare, având valoarea comună $p\,d\Omega_x$, se vor echilibra. Același lucru și pentru a doua axă orizontală y; deci $P_x = P_y = 0$.

Presiunile se reduc, așa dar, la o rezultantă verticală P_z, care va fi în cazul acesta rezultanta totală $\overline{P}$.

In consecință, pentru un mediu lichid, sfera reprezentativă (Fig. 44) a presiunilor lichidului asupra unui corp, cufundat în total sau în parte ($P_x = P_y = 0$), devine tangentă în polul O la un plan orizontal, diametrul corespunzător ce reprezintă pe $\overline{P}$ fiind vertical și îndreptat în sus.

Sfera reprezentativă a presiunei atmosferice, care se exercită și prin lichid, *riguros uniform*, pe întreaga suprafață muiată a corpului, se reduce la zero, căci:

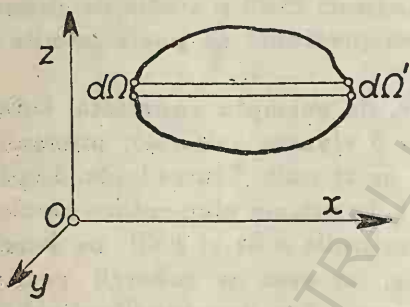


Fig. 70

$$\Omega_x = 0$$

$$\Omega_y = 0$$

$$\Omega_z = 0.$$

De altfel aceasta rezultă evident din ceea ce s'a spus mai sus privitor la o presiune riguros uniformă.

b) *Rezultantă verticală. Principiul lui Arhimede.*

Să arătăm că rezultanta verticală P_z a presiunilor pe un corp, cufundat într'un mediu fluid, este egală cu greutatea fluidului dislocuit, trece prin centrul de greutate al acestui fluid fictiv și este îndreptată în sus. Ea se numește *subpresiune*.

Să luăm cazul unui lichid omogen și să împărțim volumul corpului în prisme elementare verticale (Fig. 71, unde s'a presupus că planul xOz trece prin axa unei asemenea prisme, Ox fiind pe suprafața liberă). Presiunile $\varpi\, z\, d\Omega$ și $\varpi\, z'\, d\Omega'$ pe bazele uneia din prisme de secțiune dreaptă $d\Omega_z$ dau, respectiv, pe axa verticală descendentă Oz, proecțiile $\varpi\, z\, d\Omega_z$ și $-\varpi\, z' d\Omega_z$, având ca rezultantă

$$-\varpi\,(z' - z)\, d\Omega_z = -\varpi\, h\, d\Omega_z,$$

deci egală cu greutatea prismei de fluid dislocuită de prisma corespunzătoare a corpului, însă îndreptată în sensul opus axei pozitive alese, adică în sus.

Compunerea acestor rezultante parţiale conduce la *subpresiunea*, rezultantă generală ascendentă, egală cu greutatea fluidului dislocuit de corp şi trecând prin baricentrul acesteia, care este centrul acelor forţe paralele. Dacă corpul este numai parţial muiat în lichid, rezultatul este acelaşi. Prin urmare, în cazul suprafeţei muiate a unui corp, total sau parţial muiat, alegând un pol oarecare, sfera reprezentativă a presiunilor exercitate asupra corpului, în proecţie după diferite direcţii, va avea ca diametru (sau rază vectoare maximă) *subpresiunea*, vector vertical ascendent de mărimea greutăţii menţionate, planul tangent al sferei la pol fiind deci orizontal.

Micşorarea aparentă a greutăţii, numită impropriu *pierdere de greutate* (datorită subpresiunei antagoniste), constitue *principiul lui Arhimede*.

Se arată în mod identic că acest principiu se aplică şi atunci când este vorba de fluide suprapuse cu densităţi diferite; rezultanta parţială $-(p'-p)\,d\Omega_z$ este egală cu greutatea prizmei elementare verticale fluide, care ar înlocui prizma elementară a corpului cufundat, atunci când, în absenţa acestuia, locul său ar fi ocupat de aceleaşi fluide în repaos, ca şi spaţiul înconjurător.

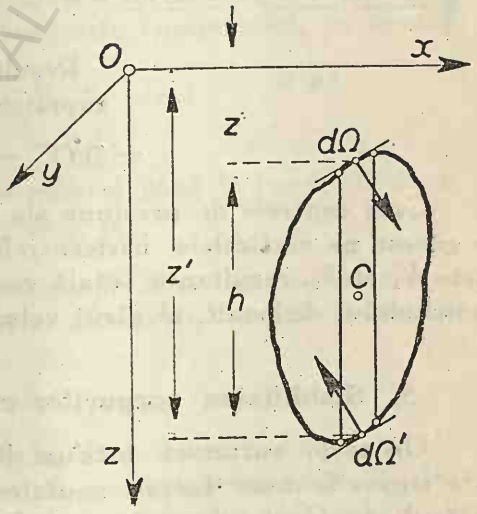


Fig. 71

Ajungem la aceeaşi concluzie prin următorul raţionament simplu, aplicat fie la un lichid omogen, fie la lichide cu densităţi diferite, fie la un mediu gazos. Suprimând, anume, cu gândul corpul cufundat şi considerând că spaţiul ocupat de el ar fi umplut cu mase fluide în repaos, identice cu masele prezente în aceleaşi straturi orizontale, ansamblul acestor mase închipuite, privite ca un ce rigid, trebue, evident, pentru echilibru, să suporte o presiune

verticală din partea restului fluidului, egală şi de sens contrar cu greutatea sa proprie şi trecând prin baricentrul său. Ori, dacă am substitui masei fluide închipuite solidul însuşi, revenind la cazul real, presiunile exercitate pe suprafaţa de contact vor rămâne aceleaşi, rezultanta lor deducându-se la fel.

Graţie subpresiunei, baloanele, cari sunt mai uşoare ca aerul, sunt supuse la forţe rezultante ascensionale şi se ridică în atmosferă.

Principiul lui *Arhimede* se mai poate deduce din expresia rezultantelor verticale ale presiunilor exercitate respectiv pe cele două părţi, în care se desparte suprafaţa corpului prin linia de tangenţă a cilindrului vertical circumscriptibil. Să arătăm aceasta pentru un lichid omogen, demonstraţia putându-se uşor generaliza în cazul mai multor lichide suprapuse sau al unei atmosfere gazoase în echilibru. Intradevăr, dacă V_1 este volumul cilindric dintre planul de apă şi suprafaţa inferioară a corpului (Fig. 72) iar V_2 volumul dintre planul de apă şi suprafaţa superioară, rezultantele verticale pe suprafeţele respective sunt:

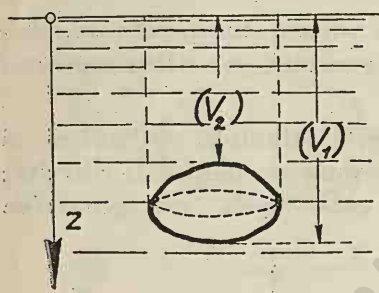


Fig. 72

$$-\varpi V_1 \quad \text{şi} \quad \varpi V_2.$$

Rezultanta verticală pe întreaga suprafaţă va fi deci:

$$-\varpi (V_1 - V_2).$$

Cum centrele de presiune ale celor două rezultante parţiale se găsesc pe verticalele baricentrelor maselor de lichid cu volumele V_1 şi V_2, rezultanta totală va trece prin centrul de greutate al lichidului dislocuit, al cărui volum este $(V_1 - V_2)$.

3. Stabilitatea corpurilor cufundate într'un lichid.

Un corp, cufundat într'un lichid de greutate volumică ϖ este supus la două forţe: geutatea proprie G_0, aplicată în baricentrul său G, şi subpresiunea lichidului

$$P = \varpi V_0,$$

care se poate considera ca aplicată în baricentrul C al lichidului dislocuit sau, fiind vorba de un lichid omogen, în baricentrul

volumului V_0, ocupat de corp, și care se numește *carenă* (în realitate forța P trece numai prin C, fără a-i fi direct aplicată).

Pentru *echilibru* trebue ca cele două forțe să fie egale și direct opuse, ceeace implică ca cele două centre G și C să fie pe aceeași verticală. Când aceste condițiuni sunt îndeplinite, se zice că corpul este *în suspensie în lichid*. Echilibrul acesta este, evident, *indiferent*, cu privire la orice deplasare de translație, sau la o deplasare de rotație în jurul unei axe verticale oarecare.

Privitor la o deplasare elementară de rotație în jurul unei axe trecând prin baricentrul corpului într'o direcție oarecare *orizontală*, pentru ca echilibrul să fie *stabil*, trebue ca baricentrul corpului să fie sub centrul lichidului dislocuit; numai atunci, întradevăr, la o rotație elementară cele două forțe menționate vor forma un cuplu ce va tinde a readuce corpul în poziția lui anterioară de echilibru. Cuplul se numește în acest caz *cuplu de îndreptare*. Contrariul se întâmplă în cazul când C se află sub G, corpul răsturnându-se prin acțiunea cuplului ce ia naștere (*cuplu de răsturnare*). Echilibrul este atunci *nestabil*. Dacă cele două centre se confundă, echilibrul este *indiferent* pentru orice translație sau rotație. Totuși, cum menținerea riguroasă a egalității celor două forțe este anevoiasă, avem totdeauna nestabilitate în sens vertical. De aceea, pentru a se menține în suspensie un *submarin*, care în oarecare măsură este compresibil, se recurge la artificii (pompare de apă, etc.).

Dacă G_0 este diferit de ϖV_0, în cazul

$$G_0 > \varpi V_0$$

corpul, nefiind susținut, se va scoborî până la fund, iar dacă

$$G_0 < \varpi V_0,$$

el se va urca la suprafață, până când, micșorându-i-se carena, se va putea stabili egalitatea între greutatea proprie a corpului și subpresiunea

$$P = \varpi V_0,$$

exercitată asupra acestuia. De fapt, în timpul urcării poziția de echilibru va fi momentan depășită, grație vitesei dobândite de corp. Acesta, după un moment de oprire va fi silit a se coborî, depășind din nou acea poziție în sens invers, adică în jos, și așa mai departe. Corpul va executa astfel o serie de oscilațiuni amortizate, înainte de a ocupa definitiv poziținea de echilibru.

Aplicația No. 26. Să studiem mișcarea verticală a unei bu'e de aer de greutate G_0 ce se ridică într'un lichid, întâmpinând presiuni descrescânde, cari provoacă dilatarea bulei. Se vor neglija fenomenele capilare:

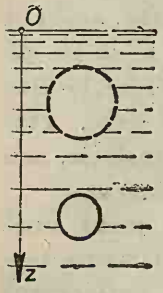


Fig. 73

Soluție. Fie V volumul variabil al bulei (Fig. 73). Pentru o axă Oz descendentă, ecuația bulei es'e:

$$\frac{G_0}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = G_0 - \varpi V \quad \text{sau} \quad \frac{1}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = 1 - \varpi\frac{V}{G_0}.$$

Fie ϖ_0 greutatea specifică a aerului la presiunea atmosferică p_0, astfel că $G_0 = \varpi_0 V_0$.

Volumul V la o altă presiune medie $p = p_0 + \varpi z$, luată în centrul de figură al bulei și presupusă uniform exercitată asupra ei — lucru permis, datorită dimensiunilor foarte mici ale bulei — se deduce din ecuația fizică a lui *Boyle — Mariotte*: $pV = p_0 V_0 = const.$

Substituind, obținem

$$1 - \frac{\varpi p_0 V_0}{p_0 + \varpi z} \cdot \frac{1}{\varpi_0 V_0} = \frac{1}{g}\frac{d^2z}{dt^2}$$

sau

$$g\left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_0}\cdot\frac{p_0}{p_0+\varpi z}\right) = \frac{d^2z}{dt^2};$$

cum ϖ_0 este mic în raport cu ϖ. termenul al doilea din paranteză este preponderent față de *1*.

Aplicația No. 27. In ce mod s'ar putea determina din interiorul unui cheson adâncimea la care acesta se găsește cufundat în apă ?

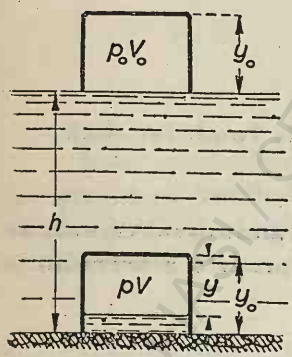


Fig. 74

Răspuns. Cu cât un cheson se află mai adânc în apă, cu atât presiunea mai mare a mediului va comprima mai mult aerul din interior (Fig. 74).

Astfel se poate găsi o relație între adâncimea h și înălțimea y a spațiului de aer din cheson.

Avem pentru cele două poziții, când chesonul se află cu baza lui succesiv la suprafața liberă și pe fund: $V_0/V = y_0/y$, astfel că ecuația fizică se poate scri:

$$p\,y = p_0\,y_0 = const.$$

La adâncimea h însă presiunea p a aerului din cheson, care se exercită pe planul de apă din interior, se poate exprima după legea hidrostatică; întradevăr ea este egală cu presiunea pe care o avem în apă la aceeași cotă în exterior, care tot timpul a comunicat cu interiorul până la așezarea chesonului pe fund:

$$p = p_0 + \varpi\,(h - y_0 + y).$$

Așa că:

$$p_0\frac{y_0}{y} = p_0 + \varpi\,(h - y_0 + y)$$

$$\frac{p_0}{\varpi}\left(\frac{y_0 - y}{y}\right) = h - (y_0 - y)$$

$$(y_0 - y)\left(1 + \frac{p_0}{\varpi y}\right) = h .$$

In practică chesonul este condus de sus şi se cunoaşte direct adâncimea lui, fără a se recurge la asemenea calcule.

Aplicaţia No. 28. Intr'un vas prismatic de greutate proprie G_2, în care se găseşte un lichid de greutate G_1, se lasă să cadă dintr'un punct, puţin deasupra suprafeţei libere (Fig. 75), o greutate G. A se găsi presiunea ce se exercită pe fundul vasului şi pe masa pe care stă vasul, în timpul când G se mişcă prin lichid, presupunând mişcarea destul de lentă pentru a se putea neglija efectele dinamice.

Răspuns. Corpul G de volum V, fiind cufundat în lichid, suportă o subpresiune egală cu ϖV. Rezultă că el va reacţiona asupra lichidului cu o presiune egală de sus în jos, care se va adăuga la greutatea lichidului; presiunea totală pe fund va fi deci $G_1 + \varpi V$, iar pe masă: $G_1 + \varpi V + G_2$.

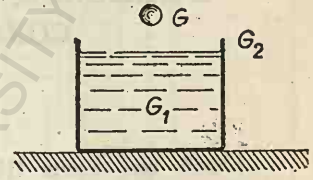


Fig. 75

Se mai poate argumenta în modul următor: prin cufundarea lui G nivelul se va ridica cu V/Ω, Ω fiind secţiunea vasului. Presiunea anterioară pe fund G_1 se va mări deci cu greutatea coloanei de lichid de înălţime V/Ω şi bază Ω, adică cu ϖV.

Bine înţeles, după atingerea fundului corpul va apăsa cu întreaga lui greutate, cele două presiuni devenind respectiv $G_1 + G$ şi $G_1 + G + G_2$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. VII.

ECHILIBRUL, STABILITATEA ŞI OSCILAŢIILE CORPURILOR PLUTITOARE.

1. Definiţiuni.

Dacă un corp liber se găseşte în echilibru, fiind numai parţial cufundat într'un lichid, se zice că pluteşte, numindu-se *plutitor*.

Secţiunea plutitorului prin planul de apă se numeşte *plan de plutire*, suprafaţa ei *arie de plutire*, iar conturul acestei secţiuni *linie de plutire* sau *linie de apă*. Dacă încărcăm corpul cu greutăţi, el se va cufunda mai mult, adică planul de plutire şi linia de apă se vor urca pe corp, mărindu-se carena. La vasele navigabile este important a se cunoaşte pe lângă *carena normală* (vasul descărcat) şi *carena maximă* admisibilă, care corespunde încărcăturei maxime; această încărcătură este egală cu greutatea unui volum de apă, reprezentat prin volumul vasului cuprins între planul de plutire respectiv şi *planul normal de plutire*.

Aplicaţie. Corpurile plutitoare găsesc, printre altele, aplicaţie la măsurarea greutăţii volumice (specifice) a lichidelor. *Aerometrele* (Fig. 76), întrebuinţate în acest scop, sunt cu volum sau cu greutate constantă. La cele cu *volum constant* există pe tije un semn O până la care se cufundă plutitorul, încărcându-se greutăţi potrivite în acest scop pe platoul aparatului. Dacă V este volumul aparatului până le semn, G_0 greutatea proprie şi G_1 greutatea adăugată, vom avea în cazul unui lichid de greutate volumică ϖ_1

$$G_0 + G_1 = V\,\varpi_1 .$$

V şi greutăţile fiind cunoscute, se deduce ϖ_1. Dacă nu se cu-

noaşte V, se cufundă areometrul într'un lichid cu ϖ_2 cunoscut şi atunci ϖ_1 rezultă din relaţia:

$$\frac{G_0 + G_1}{G_0 + G_2} = \frac{\varpi_1}{\varpi_2}.$$

La areometrele cu *greutate constantă* (greutatea proprie fără adaus) variază înălţimea de cufundare h a barei, care poartă diviziuni. Dacă V_0 este volumul aparatului fără bară sau cu o porţiune anumită de bară, dela care în sus se măsoară h muiat, avem în cazul lichidului ϖ_1

$$G_0 = \varpi_1 (V_0 + \Omega h_1),$$

unde Ω este secţiunea barei.

Dacă V_0 nu este cunoscut, se poate cufunda aparatul şi într'un al doilea lichid cu ϖ_2 cunoscut, în care caz avem analog

$$G_0 = \varpi_2 (V_0 + \Omega h_2);$$

rezultă că

$$\varpi_1 \left(1 + \frac{\Omega h_1}{V_0}\right) = \varpi_2 \left(1 + \frac{\Omega h_2}{V_0}\right)$$

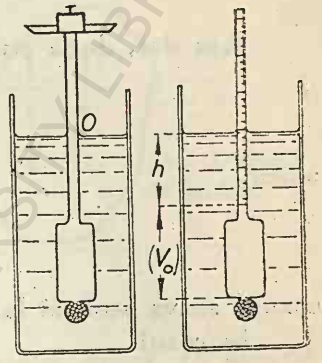


Fig. 76

sau:

$$\frac{\varpi_1 - \varpi_2}{\varpi_2} = \frac{\Omega}{V_0}\left(h_2 - \frac{\varpi_1}{\varpi_2} h_1\right).$$

Când ϖ_1 şi ϖ_2 nu diferă mult, se poate admite cu destulă aproximaţie:

$$\frac{\varpi_1 - \varpi_2}{\varpi_2} = \frac{\Omega}{V_0}(h_2 - h_1),$$

adică proporţionalitatea între diferenţa greutăţilor volumice şi aceea a adâncimilor de cufundare.

Această relaţie se întrebuinţează la gradarea areometrelor.

2. Mişcarea verticală a unui corp cufundat sau plutitor.

a) *Corp cufundat.*

Dacă greutatea G_0 a unui corp de volum constant V_0, cufundat într'un lichid de greutate volumică ϖ, diferă de subpresiunea ϖV_0, corpul se va pune în mişcare de translaţie verticală accelerată, în virtutea diferenţei celor două forţe.

Axa z fiind verticală descendentă, ecuaţia de mişcare a centrului de greutate G al corpului se scrie:

$$G_0 - \varpi V_0 = \frac{G_0}{g}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dacă ϖ_0 este greutatea volumică *medie* a corpului, definită prin $G_0 = \varpi_0 V_0$, deducem:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g\left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_0}\right).$$

Aşa dar, după cum:

$$1 - \frac{\varpi}{\varpi_0} \gtrless 0,$$

adică

$$\varpi_0 \lessgtr \varpi,$$

corpul se va scoborî la fund sau se va ridica la suprafaţă.

In cazul

$$1 - \frac{\varpi}{\varpi_0} < 0,$$

putem scrie

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\left(\frac{\varpi}{\varpi_0} - 1\right),$$

şi după cum

$$\frac{\varpi}{\varpi_0} - 1 \gtrless 1$$

adică

$$\varpi \gtrless 2\varpi_0,$$

corpul se va ridica cu o acceleraţie mai mare sau mai mică decât aceea a căderei unui corp în vid.

b. *Oscilaţiuni verticale ale unui plutitor la suprafaţa lichidului.*

Un corp, cufundat într'o masă indefinită de lichid în repaos, fiind lăsat liber, dacă este mai uşor decât greutatea unui volum egal de lichid, se va urca, după cum am văzut, spre poziţia sa de

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

echilibru, care este accea de *plutire normală*. Corpul însă, ajuns la această poziție, execută, după cum am descris mai sus, o serie de oscilațiuni verticale, cari din cauza viscozității și frecărilor se amortizează treptat. Să studiem această mișcare pentru amplitudini relativ reduse și cu neglijarea cauzelor de amortizare Fig. 77).

Fie z ordonata variabilă a centrului de greutate G al corpului față de planul de apă, cu valoarea particulară z_0 în poziția de echilibru. Fie deasemenea V și $V_0 = G_0/g$ carenele corespunzătoare. Vom avea :

$$\frac{G_0}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = G_0 - \varpi V = \varpi (V_0 - V),$$

în care

$$V = f(z).$$

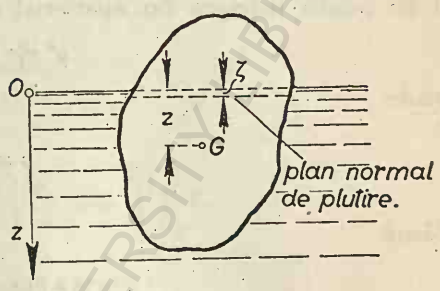


Fig. 77

Fie Ω aria planului de plutire (secțiunea prin corp) și ζ depărtarea momentană a acestui plan dela suprafața liberă (ζ socotit ca pozitiv în jos). Vom avea

$$z = z_0 + \zeta.$$

Pentru amplitudini mici, funcția de mai sus se exprimă cu suficientă aproximație prin

$$V - V_0 = \Omega \zeta.$$

Dacă numim h_0 *adâncimea medie de imersiune*, definită prin egalitatea

$$G_0 = \varpi V_0 = \varpi \Omega h_0,$$

ecuația mișcării devine :

$$\frac{\varpi \Omega h_0}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = -\varpi \Omega \zeta,$$

și cum

$$dz = d\zeta,$$

vom avea :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{g}{h_0}\zeta = 0,$$

unde coeficientul lui ζ este totdeauna pozitiv.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aceasta este ecuaţiunea diferenţială a unei oscilaţiuni verticale a corpului, de o parte şi de alta a poziţii de repaus.

Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea (analoagă cu accea a pendulului simplu), cu coeficienţi constanţi şi fără termen liber, este de forma

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \nu^2 \zeta = 0$$

şi se poate integra cu ajutorul *ecuaţiei caracteristice**)

$$\rho^2 + \nu^2 = 0 ,$$

unde

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{h_0}} ,$$

dând

$$Ae^{\rho_1 t} + Be^{\rho_2 t},$$

unde ρ_1 şi ρ_2 sunt rădăcinile (aci imaginare) ale acestei ecuaţii:

$$\rho_1 = i\nu$$

$$\rho_2 = -i\nu \qquad \text{cu } i = \sqrt{-1} .$$

Aşa dar:

$$\zeta = Ae^{i\nu t} + Be^{-i\nu t} ;$$

ori,

$$e^{i\nu t} = \cos \nu t + i \sin \nu t$$

şi

$$e^{-i\nu t} = \cos \nu t - i \sin \nu t ,$$

astfel că:

$$\zeta = (A + B) \cos \nu t + i\,(A - B) \sin \nu t$$

sau

$$\zeta = M \cos \nu t + N \sin \nu t .$$

Drept condiţii iniţiale ($t = 0$) avem:

$$\zeta = 0$$

---

*) Sau, mai repede, înmulţind cu ζ' şi făcând două integrări succesive.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\frac{d\zeta}{dt} = C,$$

(C fiind vitesa cu care corpul depăşeşte poziţia sa de echilibru), rezultând:

$$M = 0$$

şi

$$N = \frac{C}{\nu},$$

astfel că:

$$\zeta = \frac{C}{\nu} \sin \nu t = C \sqrt{\frac{h_0}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{h_0}}\, t.$$

Durata unei oscilaţiuni complete este:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{h_0}{g}},$$

ca şi la un pendul, având o lungime egală cu adâncimea medie de imersiune h_0.

In realitate aceste oscilaţiuni sunt încetul cu încetul amortizate prin rezistenţele pasive, cari însoţesc mişcarea.

In raţionamentul de mai sus s'a admis implicit, că presiunile elementare, cari au ca rezultantă subpresiunea, sunt aceleaşi ca în hidrostatică, ceeace pentru mişcări lente reprezintă aproximativ realitatea.

Aceeaşi ipoteză se va face şi la studiul ce urmează al oscilaţiilor rotative.

3. Echilibrul unui plutitor.

Putem face abstracţie de presiunea atmosferică, deoarece ea se exercită atât în exterior *direct* pe suprafaţa nemuiată a unui corp plutitor, cât şi în interiorul lichidului *indirect*, adică prin intermediul acestuia, pe suprafaţa muiată a corpului. Plutitorul rămâne astfel supus pe de o parte greutăţei proprii G_0, aplicată în centrul lui de greutate G, iar pe de altă parte rezultantei presiunilor datorite exclusiv lichidului, adică subpresiunei

$$\overline{P} = \overline{\varpi V} = -\overline{G_0},$$

aplicată în centrul de carenă O. Semnele presupun sensul descendent ca pozitiv.

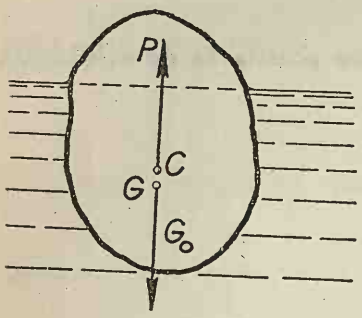


Fig. 78

Condițiunile de echilibru sunt, evident, ca C și G să se găsească pe aceeași verticală (Fig. 78) și să avem:

$$\varpi V = G_0,$$

V fiind volumul carenei.

In cazul particular al unui corp omogen de volum V_0 și greutate volumică ϖ_0, avem:

$$\varpi V = \varpi_0 V_0$$

sau

$$\frac{V}{V_0} \frac{\varpi_0}{\varpi}.$$

4. Studiul geometric al plutitorului.

Vom presupune plutitorul limitat complet în toate sensurile de o suprafață rigidă, care conține în interior mase în sumă totală constantă, dar cu o repartiție ce ar putea varia arbitrar. După această repartiție (*arimaj*), plutitorul va putea lua diferite poziții, fiind tăiat de planul lichidului după secțiuni (planuri de plutire), cari determină sub ele, conform principiului lui *Arhimede*, carene (volume cufundate) egale. In consecință nivelul liber al lichidului înconjurător, chiar dacă acesta ar fi limitat, nu se va schimba. Asemenea secțiuni sau planuri de plutire se numesc *izocarne*.

Suprafața planului de plutire, cuprinsă în plutitor, adică *aria de plutire*, o vom însemna cu Ω.

Suntem conduși astfel a studia planurile, cari dintr'un corp solid taie volume egale. Pentru înlesnirea studiului vom lăsa plutitorul imobil și vom deplasa în raport cu el planul de plutire, pe care de fiecare dată ni-l vom închipui orizontal.

Fie MN, $M'N'$ două planuri de plutire *isocarene* (cari în cazul unei forme convexe a plutitorului trebue evident să se taie în interiorul lui), formând între ele un unghiu foarte mic α. Intersecția lor η se numește *axă instantanee de inclinație*, iar orice plan normal pe η, de exemplu acela ce trece prin C, se numește *plan de înclinație*, corespunzător direcției η. Dacă repartiția maselor se schimbă astfel, ca planul de înclinație să rămână invariabil, depla

sarea reală a plutitorului se poate privi ca o rotaţie după axe instantanee, paralele cu axele de înclinaţie succesive cari, având aceeaşi direcţie, formează în corp un cilindru; secţiunea acestui cilindru prin planul de înclinaţie constitue *curba de plutire*, corespunzătoare direcţiei alese η. Pentru o altă direcţie η vom avea alte planuri şi o altă curbă de plutire.

Infăşurata planurilor de plutire (tangentă la toate aceste planuri) se numeşte *suprafaţă de plutire* (P); orice cilindru, ca acel descris mai sus, corespunzător unei axe de înclinaţie η (sau unui anumit plan de înclinaţie), este *cilindrul de contur aparent* al numitei suprafeţe după direcţia η, a cărui urmă pe planul de înclinaţie este *curba de plutire* respectivă.

Vom arăta câteva proprietăţi geometrice ale figurei.

a) *Teorema lui Lacroix.*

Să arătăm mai întâiu că *axa de înclinaţie trece prin baricentrul O al ariei de plutire.*

Intradevăr, să luăm ca plan al figurei (Fig. 79) planul de înclinaţie ce trece prin C, centrul de carenă corespunzător planului de plutire MN; să împărţim volumele unghiulare dintre cele două planuri MN şi $M'N'$ în cilindri elementari normali pe $M'N'$, având ca baze în MN elementele $d\Omega$ ale ariei de plutire Ω.

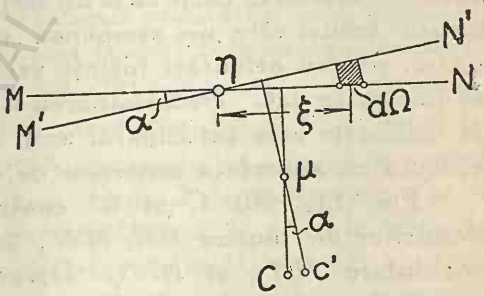


Fig. 79

Considerând distanţa ξ a lui $d\Omega$ la axa de înclinaţie η (proiectată în punctul η) ca o cantitate algebrică, egalitatea volumelor unghiulare dă:

$$\int \xi \sin \alpha \cos \alpha \, d\Omega = 0 .$$

sau

$$\int \xi \, d\Omega = 0 ,$$

c. c. t. d.

Dacă se iau diverse planuri de plutire izocarene $M'N'$, vecine cu MN, după alte axe de înclinaţie, toate intersecţiile lor cu MN vor conţine baricentrul O al ariei de plutire, tăindu-se în el.

Rezultă următoarea teoremă, datorită lui *Lacroix: Suprafaţa de plutire* (P) *este tangentă la planul de plutire în baricentrul* O *al ariei de plutire.*

Dacă suprafaţa plutitorului este închisă, suprafaţa (P) va fi deasemenea închisă, fiind cuprinsă întreagă în interiorul corpului.

Dacă facem să se rostogolească suprafaţa (P) pe planul de apă, se obţin toate poziţiunile posibile ale plutitorului, cari corespund unei anumite carene. Pentru un plan de înclinaţiune dat, acele poziţiuni se obţin evident prin rostogolirea pe planul de apă a cilindrului de contur aparent, normal pe planul de înclinaţie. Curba, în general strâmbă, de contact între acest cilindru şi suprafaţa (P) se proectează pe planul figurei (plan de înclinaţie) după urma acelui cilindru, aceeaşi cu secţiunea lui dreaptă.

b) *Teorema lui Bouguer — Dupin.*

Oricărui plan de plutire îi corespunde un centru de carenă, iar tuturor planurilor de plutire izocarene le corespunde *suprafaţa* (C) *a centrelor de carenă.*

Aşa dar, punctul prin care, după principiul lui *Arhimede*, trece subpresiunea lichidului aplicată plutitorului, nu este un punct invariabil în corp, ca la un corp complet cufundat într'un fluid. Există totuşi câte un asemenea punct invariabil, numit *metacentru*, pentru orientări infinit vecine, corespunzătoare unui plan de înclinaţie dat. Determinarea metacentrului pentru orice plan de înclinaţie este principalul scop al prezentului studiu, fiind în legătură cu suprafaţa centrelor de carenă.

Fie (Fig. 80) C şi C' centrele de carenă corespunzătoare planurilor de plutire MN, $M'N'$, iar g şi g' acelea ale volumelor unghiulare $MM'\eta$ şi $NN'\eta$. Dreptele gC şi $g'C'$ vor trece cu necesitate prin centrul g'' al volumului comun $M'BN$ şi vom avea:

$$\frac{g''C}{Cg} = \frac{g''C'}{C'g'}.$$

Rezultă că dreptele CC' şi gg' sunt paralele şi, cum la limită, când $M'N'$ tinde către MN (cu $\alpha \to 0$), gg' se aşează în MN, arcul elementar CC' va fi paralel cu acest plan.

Deducem de aci că: *suprafaţa centrelor de carenă*, pe care se găseşte orice arc infinitesimal CC', corespunzător unui plan de plutire oarecare $M'N'$, vecin cu MN, *îşi are planul său tangent*

în C, paralel cu planul de plutire MN, cu alte cuvinte: *normala într'un punct la suprafaţa (C) este perpendiculară pe planul de plutire corespunzător MN.*

Aceasta constitue teorema lui *Bouguer-Dupin*. Din $CC' // gg'$, şi din faptul că g şi g' sunt de o parte şi de alta a planului normal de plutire MN, rezultă că CC' se urcă în raport cu planul tangent în C la suprafaţa de carenă, deci această suprafaţă este *convexă*.

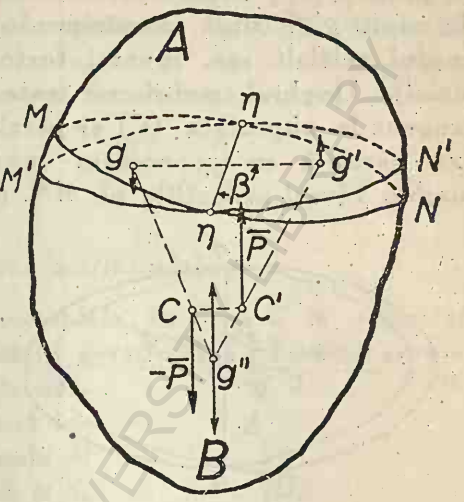


Fig. 79

c) *Metacentre.*

Fie (Fig. 80) β unghiul format la limită de gg' cu axa de înclinaţie $\eta\eta$. Variaţia formei carenei, implicând deplasarea subpresiunei (din C în C'), introduce un cuplu, numit *cuplul stabilităţii de formă*, care se poate exprima în două moduri echivalente (vom atribui apei pentru simplitate $\varpi = 1$, ceeace revine a înlocui greutăţile prin volume).

Primul mod, care este şi cel mai firesc: Subpresiunea actuală $\bar{P}$, egală cu greutatea lui $M'N'B$ (Fig 79) inversată, aplicată în C', minus subpresiunea iniţială, adică greutatea lui MNB aplicată în C, însemnată pe figură cu $-\bar{P}$. Acest cuplu se adaugă la cuplul ce ar fi luat naştere singur, dacă centrul de carenă nu s'ar fi deplasat şi care se numeşte *cuplul stabilităţei de greutate*, fiind la vasele navigabile obişnuit de sens defavorabil (C sub G).

Dar cuplul stabilităţii de formă este echivalent cu cuplul dat de subpresiunea (datorită volumului unghiular $N\eta\eta N'$) din g', care reprezintă creşterea carenei, şi de greutatea volumului unghiular $M\eta\eta M'$ din g (care este de fapt micşorarea carenei). Intradevăr, substituind forţelor din C şi C' ale cuplului stabilităţii de formă componentele lor, cele două forţe din g'' (nenumite pe figură), corespunzătoare volumului comun $M'BN$, se vor anula reciproc, lăsând numai forţele din g şi g' ale cuplului menţionat ca echivalent, şi care constitue deci o a doua expresie a cuplului stabilităţei de formă.

Cele două perechi de forţe ale cuplurilor echivalente fiind normale pe planul $M'N' \rightarrow MN$, planurile paralele ale acestora,

vor fi şi ele perpendiculare pe $M'N' \to MN$. Ele vor forma cu axa de înclinaţie $\eta\eta$ acelaşi unghiu ca şi urmele lor respective pe planul de plutire MN. Dintre acestea una va coincida la limită cu braţul de cuplu $g'g''$ (finit ca mărime între forţe infinitesimale, pe când cuplul celălalt are, invers, forţe finite şi braţul CC' infinitesimal). Unghiul menţionat este β. Dacă ducem în C planul tangent la suprafaţa (C) şi paralel cu MN, iar în el ducem o axă paralelă cu $\eta\eta$, aceasta va forma cu CC' la limită acelaşi unghiu β (vezi proecţiile pe MN, fig. 80).

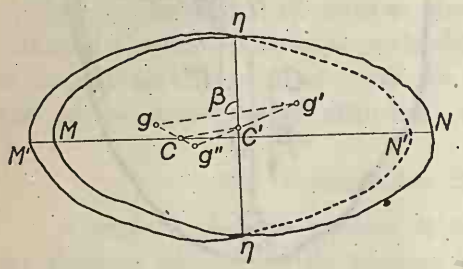


Fig. 80

Dacă, acum, pentru calcularea momentelor, înlocuim greutăţile volumelor unghiulare cari formează cuplul gg', prin componentele lor elementare ca în figura 78 şi exprimăm, pe de o parte, momentul rezultant al acestora în raport cu axa η (ceeace revine la a lua momentele proecţiilor forţelor de cuplu din g şi g' pe planul de înclinaţiune, în raport cu urma η a numitei axe), iar pe altă parte exprimăm momentul cuplului echivalent (cu braţul CC'), proectat pe acelaşi plan, vom avea egalitatea:

$$\alpha \int \xi^2 \, d\Omega = \alpha I = \alpha \, \Omega \, r^2 = V\overline{CC'} \, sin \, \beta \, ,$$

unde I şi r sunt respectiv momentul de inerţie şi raza de giraţie a ariei de plutire Ω în raport cu axa $\eta\eta$.

Deducem, h_0 fiind înălţimea medie a carenei ($h_0 \, \Omega = V$):

$$\frac{\overline{CC'} \, sin \, \beta}{\alpha} = \frac{I}{V} = \frac{r^2}{h_0} \, .$$

Se vede că primul membru este expresia razei de curbură în C a urmei, pe planul de înclinaţie, a cilindrului de contur aparent al suprafeţei (C), paralel cu direcţia $\eta\eta$, adică normal pe acel plan.

Cele două normale la suprafaţa centrelor de carenă C şi C' fiind (fără a se tăia în general, decât dacă $\overline{CC'}$ este pe o *linie de curbură*) perpendiculare pe planurile de plutire respective, formează între ele unghiul α, care, pe planul de înclinaţie (Fig. 78) normal pe $\eta\eta$, figurează în mărime naturală.

Perpendiculara comună între aceste normale va fi evident paralelă cu intersecția $\eta\eta$ a planurilor de plutire (pe cari ele sunt perpendiculare) și își va avea urma la intersecția primei normale, așezată în planul de înclinație, cu proecția celei de a doua $C'\mu$. Punctul μ se numește *metacentru relativ la axa de înclinație* $\eta\eta$.

Dacă numim ρ menționata rază de curbură, vom scrie

$$\rho = \mu\overline{C} = \frac{\overline{Cc'}}{\alpha} = \frac{\overline{CC'}\ sin\ \beta.}{\alpha} = \frac{r^2}{h_0}.$$

d) *Stabilitatea plutitorului.*

Fie (Fig. 81) CA și $C'A'$ normalele în C și C' la suprafața centrelor de carenă, totul văzut în perspectivă. Fie $\mu\mu'$ perpendiculara lor comună. După teoria normelor $\mu\mu'$ este totdeauna cuprinsă între centrele de curbură principale M și m ale secțiunilor principale S_1 și S_2 duse prin punctul C.

Așa dar, metacentrul μ are două poziții extreme: M numit *marele metacentru* și m *micul metacentru*, corespunzând planurilor principale de curbură ale suprafeței (C), luate ca planuri de înclinație. Pentru aceste două înclinațiuni particulare μ' coincidând cu μ, C' se va găsi chiar în planul de înclinație, coincidând cu proecția sa c' din cazul general. Axa cuplului, care este perpendiculară pe planul cuplului, va fi atunci perpendiculară pe planul de înclinație, deci paralelă cu axa de înclinație $\eta\eta$.

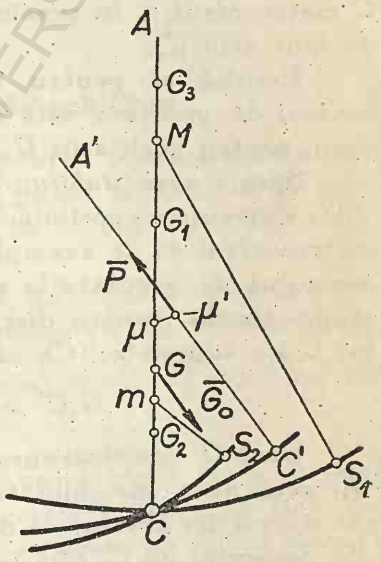


Fig. 81

In studiul ce precede n'a intervenit până acum centrul de greutate G al plutitorului, întrucât suprafața de plutire (P) și suprafața centrelor de carenă (C) sunt evident independente de arimaj (repartiția maselor). Fiind dat acum în mod arbitrar centrul de greutate G al plutitorului, să căutăm: 1^0) pozițiile posibile de echilibru și 2^0) condițiile de stabilitate.

1^0.— In G este aplicată vertical în jos (sens luat ca pozitiv) greutatea proprie $\overline{G}_0$, iar prin centrul de carenă trece subpresiunea $\overline{P} = -\overline{G}_0$: pentru echilibru va trebui ca G și C să fie pe

aceeaşi verticală, *axa de plutire*, care totodată va fi normală în C la suprafaţa (C) a centrelor de carenă.

Orientările de echilibru ale plutitorului se vor găsi, aşa dar, ducând din G toate normalele posibile pe suprafaţa centrelor de carenă şi orientând normalele interioare vertical în sus.

2^0— Pentru o asemenea poziţie de echilibru, axa de plutire fiind AC, va exista evident totdeauna stabilitate, dacă G se găseşte sub C, întrucât cuplul $\overline{G}_0$, $\overline{P}$, care ia naştere la orice deplasare mică, va fi *un cuplu de îndreptare*. In cazul însă când G se găseşte deasupra lui C, cuplul va fi de îndreptare numai dacă G se va găsi sub metacentrul μ corespunzător noului centru de carenă C' vecin (Fig. 81). Vedem, aşa dar, că condiţia de stabilitate pentru o înclinaţie elementară dată n'ar diferi de aceea a corpului complet cufundat, dacă am substitui centrului de carenă C metacentrul μ, în preajma căruia trece subpresiunea (ea trece de fapt prin μ').

Rezultă că, pentru înclinaţia corespunzătoare lui C', dacă centrul de greutate este în G, cuplul va *îndrepta* plutitorul, pe când, pentru poziţia în G_1, el va spori înclinaţia.

Spre a avea *stabilitate absolută*, adică pentru toate înclinaţiile elementare posibile, G va trebui să se găsească sub micul metracentrul m, de exemplu în G_2. In acest caz distanţa G_2C a centrului de greutate la suprafaţa centrelor de carenă este un minim obsolut pentru distanţele lui G_2 la punctele din domeniul lui C ale suprafeţei (C), căci în triunghiul $G_2C'\mu$ (cu $\mu C' = \mu C$)

$$G_2C' > \mu C' - \mu G_2 = G_2C.$$

Dacă G este deasupra marelui metacentru M, de exemplu în G_3, vom avea instabilitate absolută; distanţa G_3C va fi în acest caz un maxim absolut al distanţelor G_3 la punctele suprafeţei (C) din domeniul lui C, căci în triunghiul $G_3C'\mu$ (ţinând seamă şi aci că $\mu C' = \mu C$)

$$G_3C' < \mu C' + \mu G_3 = G_3C.$$

Cu G între m şi M avem echilibru *mixt*, stabil pentru unele înclinaţiuni, instabil pentru altele. Distanţa GC sau G_1C este minimă pentru unele secţiuni, normale în C, ale suprafeţei centrelor de carenă, maximă pentru altele.

Din expresia

$$\rho = \overline{\mu C} = \frac{r^2}{h_0}$$

rezultă că planurile principale de curbură ale suprafeţei (C) cu ρ_{max} sau ρ_{min}. sunt în corespondenţă cu r_{max} şi r_{min}, adică cu axele principale de inerţie ale ariei de plutire. De altfel numai pentru înclinaţiunile principale, MC şi mC sunt totodată şi raze de curbură (ale secţiunilor normale) ale suprafeţei (C) în punctul C. Pentru înclinaţiuni intermediare, precum am văzut, μC nu este decât raza de curbură ρ a secţiunei drepte a cilindrului de contur aparent, normal pe planul de înclinaţiune, proprietate care se menţine evident şi pentru planurile principale de înclinaţie.

Comparând, pentru o deplasare posibilă a plutitorului, condiţia de stabilitate a acestuia, de a avea pe G sub μ corespunzător, cu condiţia de stabilitatea unui pendul, vedem că metacentrul μ joacă rolul punctului de suspensiune al pendulului, întrucât, pentru echilibrul stabil al acestuia, centrul său de greutate trebue să se găsească pe aceeaşi verticală cu punctul de suspensie şi dedesubtul lui.

5. Numărul poziţiilor de echilibru.

Problema se reduce la a găsi, pentru o suprafaţă convexă (suprafaţa centrelor de carenă) şi un punct G (centrul de greutate), numărul total n al normalelor ce se pot duce din G pe numita suprafaţă.

Se poate demonstra uşor teorema lui *Reech*, anume că n este par, şi că poziţiile absolut stabile, împreună cu cele absolut nestabile, sunt în număr de $\nu = \frac{n}{2} + 1$, restul de $\nu' = \frac{n}{2} - 1$ fiind poziţii de echilibru mixt.

Să ne închipuim în acest scop, cu centrul în G, o masă lichidă sferică, ce îneacă la început complet suprafaţa (C), dar a cărei rază se micşorează treptat prin evaporaţie. Când sfera va deveni tangentă la suprafaţa (C), va apare o *insulă*, iar o dreaptă ce duce din G la punctul de contact va fi una din normalele maxime (categoria ν).

Asemenea poziţii, corespunzând *aparifiei* succesive a unor creştete de *insule* la suprafaţă, pentru cari deci distanţa GC este un maxim absolut, sunt poziţii de echilibru nestabil: poziţiile cari corespund fundurilor de mare (mare cu suprafaţă sferică) ce se ating odată cu *dispariţia* unei *mări* prin uscare, sunt poziţii de echilibru stabil, întrucât normala GC este un minim absolut (de asemenea cat. ν) O poziţie de echilibru mixt corespunde punctului

celui mai ridicat al fundului unui istm ce apare fie pentru uni două insule la atingerea fundului (dispărând o *insulă*) fie pentru a despărţi o mare în două (făcând să apară o *mare* în plus). In aceste din urmă cazuri normalele nu sunt nici maxime nici minime absolute, putând fi numite mixte (categoria ν').

Numărul *insulelor* nu poate trece, evident dela *0* iniţial la *1* final decât dacă, λ fiind numărul *aparifiilor* succesive, $\lambda - 1$ va fi numărul *disparifiilor* succesive. De asemenea numărul *mărilor* nu va putea trece dela *1* iniţial la *0* final decât dacă, μ fiind numărul *aparifiilor* succesive, $\mu + 1$ va fi numărul *disparifiilor* succesive.

Dar aceasta va însemna, după ceeace precede, întâlnirea a $\nu = \lambda + (\mu + 1)$ normale din prima categorie şi $\nu' = (\lambda - 1) + \mu$ normale din a doua categorie.

Numărul total de normale va fi deci $2(\lambda + \mu)$ şi teorema lui *Reech* este demonstrată.

Exemplu. Să luăm ca exemplu o prismă triunghiulară omogenă, plutind într'o poziţie astfel ca muchiile de lungime *l* să fie orizontale, una singură din ele fiind mujată.

Fie (Fig. 82) *ABD* secţiunea sa dreaptă mijlocie, care va cuprinde evident punctele *G* şi *C*, şi să considerăm problema în plan.

Dacă *d* este raportul greutăţilor volumice a prismei şi al lichidului, suprafaţa *S* a triunghiului *MND*, determinat de linia de plutire, va fi *d.S.* Infăşurata dreptelor *MN*, cari despart o arie *MDN* constantă, este o iperbolă, având *AD* şi *BD* ca asimptote. Mijlocul *O* al lui *MN* este punctul de contact între linia de plutire şi această iperbolă, iar baricentrul *C* al carenei *MDN* se găseşte la *2/3* din *DO*, începând din *D*.

Locul lui *C* este în consecinţă o altă iperbolă, având aceleaşi asimptote *AD* şi *BD* şi, pentru a avea o poziţie de echilibru, trebue scoborît din *G*, centrul de greutate al lui *ABD*, o normală pe această iperbolă; normala în chestiune va corespunde unei axe de plutire. Cum dintr'un punct se pot scoborî patru normale pe o iperbolă, din care însă una îşi are piciorul pe a doua ramură din unghiul opus lui *BDA*, unde evident corpul nu poate avea un plan de plutire, avem trei soluţiuni, una totdeauna reală, celelalte două putând fi reale sau imaginare.

La fiecare muchie, cufundată succesiv în lichid, corespund astfel trei poziţii de echilibru, două eventual imaginare, dând

astfel nouă poziţii de echilibru. Presupunând că prisma pluteşte cu două muchii muiate, d. e. B şi A, suprafaţa patrulaterului $ABMN$ va fi egală cu $d.S$ şi deci triunghiul MND va avea valoarea $(1-d)\,S$, problema fiind identică cu cea dintâiu, cu simpla înlocuire a lui d prin $(1-d)$. Vom avea deci încă nouă poziţii de echilibru, parte din ele eventual imaginare.

O altă poziţie de echilibru evident este aceea în care prisma ar pluti cu muchiile ei l verticale şi se mai pot concepe şi alte poziţii cu muchiile înclinate. Se vede uşor că, cercetarea numărului total de soluţiuni, chiar într'un caz simplu ca cel de mai sus, constitue o problemă destul de complicată.

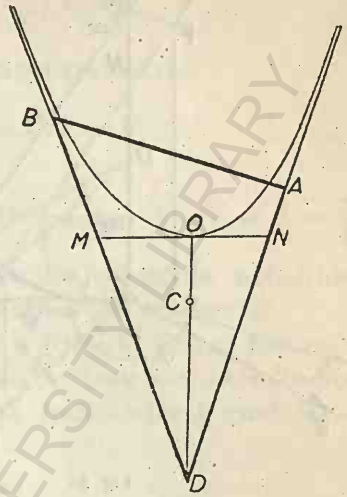


Fig. 82

6. Complement geometric.

a) *Poziţia metacentrului* μ *între centrele de curbură principale* M *şi* m *ale suprafeţei* (C) *pentru un punct* C.

Se poate demonstra în mod riguros că μ se găseşte între M şi m, şi coincide cu unul din aceste puncte atunci, când axa de înclinare este paralelă cu una din direcţiile principale (tangentele la liniile de curbură) în C ale suprafeţei (C). Suprafaţa (C) fiind convexă în C*), să luăm origina în acest punct (Fig. 83), axa z după normala CN de partea concavităţii, iar axele x şi y după direcţiile principale, sau tangentele la liniile de curbură în C. Ecuaţia suprafeţei fiind rezolvată în raport cu z, să punem ca de obiceiu:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=\frac{\partial p}{\partial x}=r\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{dx}=s\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial q}{\partial y}=t\,,$$

adăugând indicile o valorilor referitoare la origină.

*) Suprafaţa (C), după cum s'a spus mai sus, este convexă în toate punctele ei. Indicatricea curburilor în C este deci o elipsă, C fiind un *punct eliptic*.

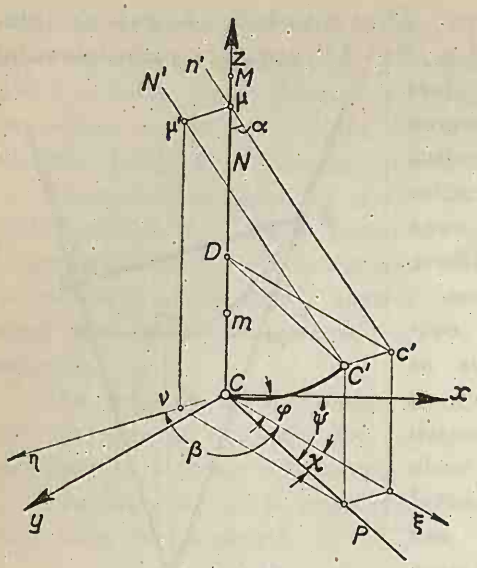


Fig. 83

După felul cum s'au ales axele, p_0, q_0, s_0 sunt nule și, desvoltând pe z după formula lui *Mac-Laurin* pentru valori mici ale lui x și y, avem ecuația unui paraboloid:

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x_0^2 + t_0 y^2) \ldots\ldots, \quad (1)$$

unde r_0 și t_0 sunt pozitive, inversele lor reprezentând razele principale de curbură:

$$CM = R_1 = \frac{1}{r_0} \text{ și } Cm = R_2 = \frac{1}{t_0}.$$

Ecuațiile normalei $C'N'$ în punctul vecin $C'(x, y, z)$ sunt:

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}. \quad (2)$$

Perpendiculara comună $\mu\mu'$ are ca proecție pe planul xy perpendiculara $C\nu$, dusă la proecția normalei $C'N'$ pe numitul plan, iar planul $z\mu\mu'$ are ca ecuație:

$$pX + qY = 0. \quad (3)$$

Punctul de intersecție între acest plan și dreapta $C'N'$ este μ', iar Z al lui μ', care este același ca al lui μ, rezultă din (2) și (3), prin eliminarea lui X și Y:

$$Z = z + \frac{px + qy}{p^2 + q^2}$$

sau, cu valorile lui p și q scoase din ecuația (1) a suprafeței în vecinătatea lui C:

$$Z = z + \frac{r_0 x^2 + t_0 y^2 + \cdots}{r_0^2 x^2 + t_0^2 y^2 + \cdots}.$$

Când C' tinde către C, x, y, z tind către 0, iar raportul $\frac{y}{x}$ tinde către $tg\,\psi$, ψ fiind unghiul făcut cu Ox de direcția limită a lui CC', adică tangenta în C la curba după care C' tinde către C.

Prin urmare vom avea:

$$lim\ Z = lim\ \overline{C\mu} = \frac{r_0 + t_0 tg^2\psi}{r_0^2 + t_0^2 tg^2\psi}.$$

Valoarea limită a lui $\overline{C\mu}$ este ρ, cuprinsă între:

$$\frac{1}{r_0} = \overline{CM} = R_1 \quad \text{și} \quad \frac{1}{t_0} = \overline{Cm} = R_2,$$

fiind egală cu una din aceste cantități pentru $\psi = 0$ și $\psi = \frac{\pi}{2}$, când direcția limită a lui CC' este una din direcțiile principale ale suprafeței în punctul C (direcțiile liniilor de curbură).

Este de notat că direcția limită a lui CC' (care formează unghiul ψ cu axa Cx) și aceea a lui $\mu\mu'$ sau $C\nu$ (sau axa de înclinație η) sunt conjugate în raport cu elipsa indicatrice a curburelor din C.

Intradevăr, ecuația indicatricei este:

$$r_0 x^2 + t_0 y^2 = 1 \qquad (4)$$

iar ecuația dreptei $C\nu$:

$$pX + qY = 0$$

sau, după valorile lui p și q,

$$(r_0 x + ...)\, X + (t_0 y + ...)\, Y = 0.$$

Când x și y tinde spre 0, astfel ca $\frac{y}{x} \to tg\psi$, ultima ecuație devine:

$$r_0 X + t_0 Y tg\psi = 0,$$

ecuația diametrului conjugat al direcției ψ pe indicatrice, deoarece produsul coeficentului unghiular al acestei drepte $-\frac{r_0}{t_0 tg\psi}$ cu $tg\psi$ este $-\frac{r_0}{t_0} = -\frac{b^2}{a^2}$ unde $a = \frac{1}{\sqrt{r_0}}$ și $b = \frac{1}{\sqrt{t_0}}$ sunt semiaxele, aici reale (căci C este *punct eliptic*, pe când ar fi imaginare în cazul unui *punct iperbolic*).

Numele acestei conice, numită și *indicatricea lui Dupin*, face aluzie la faptul că razele ei, ridicate la pătrat, *indică* razele de curbură ale *secțiunilor normale* după diferitele direcții ψ în punctul C. Intradevăr, însemnând cu r_ψ raza respectivă a indicatricei, pe

care o presupunem trasată pe planul xy, și cum $r_\psi \cos\psi = x$ și $r_\psi \sin\psi = y$, ecuația ei (4) devine:

$$r_0 \cos^2\psi + t_0 \sin^2\psi = \frac{1}{r_\psi^2}.$$

Cum pe de altă parte $r_0 = \frac{1}{R_1}$ și $t_0 = \frac{1}{R_2}$, rezultă relația:

$$\frac{\cos^2\psi}{R_1} + \frac{\sin^2\psi}{R_2} = \frac{1}{r_\psi^2}. \qquad (5)$$

Primul membru, însă, după cum se demonstrează în cazul general și după cum vom vedea mai departe pentru cazul ce ne interesează, reprezintă inversul razei de curbură R_ψ a secțiunei normale prin C, având ψ ca azimut.

b) *Curburile suprafeței centrelor de carenă.*

1'. *Paraboloidul osculator.* Fie paraboloidul $\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2z$, raportat la planurile lui principale sau de simetrie, având în vârful C (care fiind eliptic are toate curburile de același sens) aceleași curburi ca și suprafața convexă (C) *).

Parabolele de intersecție prin planurile coordonate sunt: $x^2 = 2R_1 z$, și $y^2 = 2R_2 z$, unde R_1 și R_2 sunt razele de curbură principale ale paraboloidului în vârful C.

Pentru un sistem de axe $C\xi\eta z$ dreptunghiulare, cu aceeași axă Cz, dar la care $C\xi$ formează cu Cx unghiul φ, formulele de transformare sunt:

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \qquad y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi$$

și ecuația paraboloidului devine:

$$\xi^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right) + \eta^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{R_2}\right) - 2\xi\eta\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 2z. \qquad (1)$$

Secțiunea paraboloidului prin planul $\xi C z$ are ca ecuație

*) Indicatricea $rx^2 + ty^2 = 1$ a curburilor în C, care aici este un punct *eliptic* este o elipsă. Nu același lucru se întâmplă cu suprafața de plutire (P), care nu este cu necesitate convexă, putând avea deci puncte cu curburi contrare, pentru cari indicatricea e o iperbolă (puncte *iperbolice*).

$$\eta = 0 \qquad \xi^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2} \right) = 2z,$$

fiind o parabolă, a cărei rază de curbură R_φ este dată de formula:

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2} = \frac{1}{r_\varphi^2}, \qquad (2)$$

unde am introdus și raza vectoare r_φ a indicatricei conform ecuației acesteia (5). *a)*. Așa dar: $r_\varphi = \sqrt{R_\varphi}$, după cum am anunțat la *a)*.

Această este formula lui *Meusnier* pentru o suprafață oarecare, deoarece în vecinătatea unui punct eliptic orice suprafață poate fi înlocuită prin paraboloidul osculator (1). Pentru $\varphi = 0^0$ sau $\varphi = 90^0$ regăsim razele R_1 și R_2.

2° — *Cilindri de contur aparent.* Să găsim ecuația cilindrului de contur aparent cu generatoarele paralele cu $C\eta$. Să exprimăm

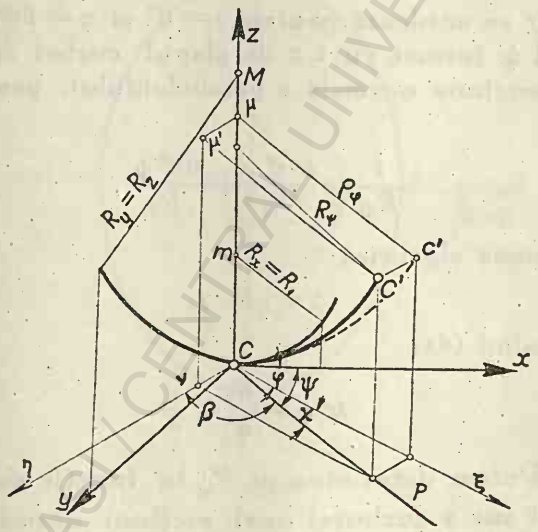


Fig. 84
P = urma planului curbei de contact.

că o dreaptă paralelă cu $C\eta$, definită de ecuațiile $\xi = \xi_0$, $z = z_0$, înțeapă paraboloidul în două puncte confundate, adică ecuația (1) admite o rădăcină dublă în η (Fig. 84).

Făcând toate calculele, găsim cilindrul parabolic sau parabola (secțiunea dreaptă a cilindrului sau urma sa pe planul $zC\xi$):

$$\xi^2 = 2z \ (R_1 \cos^2 \varphi + R_2 \sin^2 \varphi),$$

a cărei rază de curbură la vârf este:

$$\rho_\varphi = R_1 \cos^2\varphi + R_2 \sin^2\varphi. \tag{3}$$

Pentru $\varphi = 0^0$ și $\varphi = 90^0$ regăsim $\rho = R_1$ și $\rho = R_2$, întrucât secțiunile drepte ale cilindrului coincid cu secțiunile normale principale ale paraboloidului, fiind deci chiar curbele de atingere.

3°. Să determinăm în cazul general azimutul secțiunei plane, după care cilindrul (3) atinge paraboloidul (1). Eliminând pe z între aceste două ecuații, se obține o dreaptă dublă:

$$\xi \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \eta \left(\frac{\sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{R_2}\right),$$

de unde:

$$\frac{\eta}{\xi} = tg\,\chi = \frac{(R_2 - R_1)\sin\varphi\cos\varphi}{R_2 \sin^2\varphi + R_1 \cos^2\varphi} \tag{4}$$

și vedem că χ se anulează pentru $\varphi = 0^0$ și $\varphi = 90^0$.

Unghiul ψ, format cu Cx de planul curbei de contact, care este și ea o secțiune normală a paraboloidului, pentru care avem după (2):

$$\frac{1}{R_\psi} = \frac{\cos^2\psi}{R_1} + \frac{\sin^2\psi}{R_2},$$

este dat de suma algebrică

$$\psi = \varphi + \chi,$$

de unde, folosind (4):

$$tg\,\psi = \frac{R_2}{R_1} tg\,\varphi. \tag{5}$$

Notă. Putem determina pe R_ψ în funcție de φ, fie din expresia de mai sus a curburei unei secțiuni normale ψ, înlocuind $\cos^2\psi$ și $\sin^2\psi$ în funcție de $tg\,\varphi$, fie proectând parabola de contact cu azimutul ψ pe planul cu azimutul φ, în care obținem curba de contur aparent, a cărei rază în C este ρ_φ. In acest din urmă procedeu, unghiul de proecție fiind χ, vom avea:

$$R_\psi = \frac{\rho_\psi}{\cos^2\chi} = \rho_\varphi \left(1 + tg^2\chi\right) = \frac{R_1^2 \cos^2\varphi + R_2^2 \sin^2\varphi}{R_1 \cos^2\varphi + R_2 \sin^2\varphi}.$$

Egalitatea $R_\psi = \frac{\rho_\psi}{\cos^2\chi}$ rezultă imediat din forma ecuației para-

bolei raportată la axa și tangenta la vârf, în care caz parametrul ei este chiar raza de curbură.

Intradevăr, pentru curba de atingere avem:

$$\xi^2 = 2 R_\psi z, \quad \text{iar pentru proecția ei} \quad \xi'^2 = 2\rho_\varphi z.$$

Cum însă $\xi' = \xi \cos \gamma$, egalitatatea în chestiune devine evidentă.

Din razele de curbură ale celor două familii de curbe, secțiuni normale ale suprafeței (C) și secțiuni normale ale cilindrilor de contur aparent, interesează aici numai razele ρ ale acestor din urmă.

c) *Momente de inerție ale unei arii de plutire.*

1°. Fie O baricentrul ariei de plutire Ω (Fig. 85), în care ducem o dreaptă $O\xi$, făcând cu Ox unghiul φ.

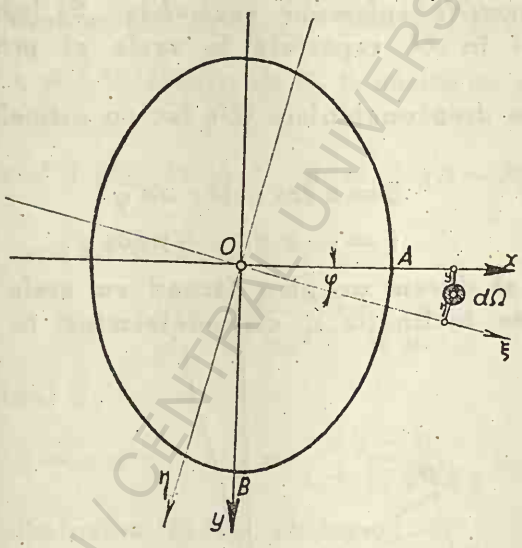


Fig. 85

Momentul de inerție al ariei plane în raport cu $O\xi$ este:

$$I = \int \eta^2 d\Omega$$

și cum

$$\eta^2 = (x \sin\varphi - y \cos\varphi)^2$$

avem:

$$I = \sin^2\varphi \int x^2 d\Omega + \cos^2\varphi \int y^2 d\Omega - 2 \cos\varphi \sin\varphi \int xy\, d\Omega$$

$$I = M \sin^2\varphi + N \cos^2\varphi - 2\, Q \cos\varphi \sin\varphi$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să luăm pe $O\xi$ lungimea $l = \frac{1}{\sqrt{I}}$; locul geometric al extremității va fi elipsa de inerție:

$$My^2 + Nx^2 - 2Qxy = 1 .$$

Ecuația elipsei, raportată la axele ei — axele principale de inerție —, presupuse acum a fi chiar Ox și Oy, devine:

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad \text{cu } A = \int y^2 d\Omega, \quad B = \int x^2 d\Omega, \quad \int xy\, d\Omega = 0.$$

Momentul de inerție în raport cu o dreptă, înclinată cu un unghiu φ față de axa principală Ox, ia forma:

$$I = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi .$$

2°. *Baricentrele volumelor unghiulare.* Să luăm o arie plană cu baricentrul în O, raportată la axele ei principale x și y (Fig. 86).

Două axe dreptunghiulare $\xi O\eta$ fac cu primele unghiul φ și avem:

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$
$$\eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi .$$

Prin $O\eta$ să ducem un plan făcând cu acela al figurei un unghiu mic de înclinație α, care determină în plutitor două

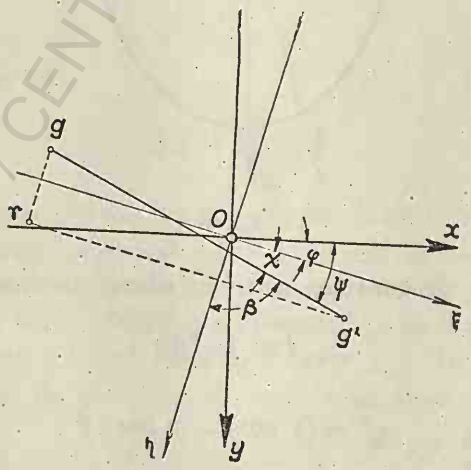


Fig. 86

volume unghiulare, cu baricentrele în g și g'. Să găsim lungimea și azimutul dreptei gg'.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fie U oricare din volumele unghiulare, cari sunt egale. Vom avea pentru ξ al baricentrului g':

$$U\xi_{g'} = \alpha \int \xi^2 d\Omega ,$$

integrala întinzându-se pe aria din dreapta lui $O\eta$. Pentru baricentrul g vom avea: $-U\xi_g = \alpha \int \xi^2 d\Omega$,

integrala întizânndu-se la stânga lui $O\eta$.

Rezultă pentru proecția lui gg' pe axa ξ:

$$\overline{g'\gamma} = \xi_{g'} - \xi_g = \frac{\alpha}{U} \int \xi^2 d\Omega ,$$

integrala întinzându-se asupra întregei arii.

Vom găsi deasemenea, $\overline{g\gamma} = \eta_{g'} - \eta_g = \frac{\alpha}{U} \int \eta \xi \, d\Omega$.

Inlocuind η și ξ în funcție de x, y, găsim cu notația de mai sus:

$$\overline{g'\gamma} = \frac{\alpha}{U} (B \cos^2 \varphi + A \sin^2 \varphi) , \qquad \overline{g\gamma} = \frac{\alpha}{U} (A - B) \sin \varphi \cos \varphi .$$

Segmentul $\overline{gg'}$ face cu $O\xi$ unghiul χ:

$$tg\,\chi = \frac{\overline{g\gamma}}{\overline{g'\gamma}} = \frac{(A-B) \sin \varphi \cos \varphi}{B \cos^2 \varphi + A \sin^2 \varphi} , \qquad (4')$$

iar cu Ox unghiul ψ:

$$\psi = \varphi + \chi , \quad tg\,\chi = \frac{tg\,\psi - tg\,\varphi}{1 + tg\,\psi\ tg\,\varphi} ,$$

de unde, prin eliminarea lui $tg\chi$, obținem:

$$tg\,\psi = \frac{A}{B}\, tg\,\varphi \qquad (5')$$

și se vede că $\psi = \varphi$ pentru $\varphi = 0^0$ și $\varphi = 90^0$.

d) *Razele ρ_φ în funcție de momentele de inerție ale ariei de plutire.*

Am stabilit că $\rho_\varphi = \frac{I_\varphi}{V}$, iar pentru axele principale de inerție ale ariei de plutire $R_1 = \frac{A}{V}$, $R_2 = \frac{B}{V}$. Cum pe de altă

parte

$$I_\varphi = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi , \qquad (3)$$

rezultă

$$\rho_\varphi = \frac{1}{V}(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) = R_1 \cos^2 \varphi + R_2 \sin^2 \varphi .$$

In modul acesta, plecând dela relaţia dintre momentele de inerţie ale ariei de plutire, regăsim relaţia dintre razele de curbură ale urmelor de contur aparent.

Proporţionalitatea între I şi ρ, şi paralelismul segmentelor gg' şi CC' cari fac cu $O\xi$ acelaşi unghiu χ (complementul unghiului β), explică indentitatea de formă a formulelor (4'), (5') şi (3') relative la momentele de inerţie ale ariei de plutire, cu (4), (5) şi (3), relative la razele de curbură ale urmelor de contur aparent.

7. Tratarea problemei stabilităţii corpurilor plutitoare prin considerarea energiei potenţiale.

Ipoteza că lichidul este *perfect* implică, ca suma lucrului intern pentru totalitatea sistemului format din plutitor şi lichid să fie nulă, ori care ar fi mişcările acestor corpuri.

Presiunea atmosferică dă deasemenea un lucru nul, fiindcă volumul aerului nu variază.

Rămâne deci de examinat efectul gravitaţiei. Se ştie că condiţia necesară şi suficientă de stabilitate este ca centrul de greutate al sistemului să fie situat cât mai jos posibil, sau ca energia potenţială a sistemului în câmpul gravităţiei — suma greutăţilor înmulţite respectiv cu cotele baricentrelor deasupra unui plan de referinţă — să fie minimă.

Vom admite că, la micile mişcări efectuate în jurul poziţiei de echilibru, suprafaţa liberă a lichidului rămâne sensibil plană şi orizontală.

Dacă, plecând de la poziţia de stabilitate, dăm solidului o translaţie orizontală sau o rotaţie în jurul unei axe verticale, energia potenţială evident nu se modifică. De altfel se poate uşor arăta că acelaşi lucru se întâmplă şi la o translaţie verticală.

Intradevăr, dacă luăm mai întâiu un cilindru vertical de greutate G_0 şi secţiune Ω, plutind pe un lichid de greutate specifică ϖ, cu o adâncime de imersiune h_0, avem: $G_0 = \varpi \Omega h_0$. Mărind pe h_0 cu dh, energia potenţială a cilindrului se va

micșora cu $G_0\,dh$, dar simultan prin ridicarea la suprafață a unei mase de lichid $\varpi\Omega\,dh$, dislocuită la bază, se va mări energia potențială a lichidului cu $\varpi\Omega\,dh.h_0 = G_0\,dh$. Energia potențială a ansamblului nu se modifică astfel la coborîrea cilindrului și tot astfel se întâmplă și la ridicarea lui.

Un corp de o formă oarecare se reduce la cazul cilindrului, deoarece se poate presupune descompus în cilindri verticali elementari.

Rezultă că, pentru a putea studia variațiile energiei potențiale W a sistemului total, putem presupune că, la orice deplasare, volumul de lichid dislocuit (carena) rămâne invariabil; într-adevăr, orice deplasare a corpului poate deveni isocarenă prin adăugirea unei translații verticale convenabile care, precum am arătat, nu modifică energia potențială W. Așa dar, vom putea presupune invariabilă suprafața liberă a lichidului, admițând pentru corp numai deplasări isocarene de rotație în jurul unor axe orizontale.

Linia de inclinație trece în acest caz, după cum s'a demonstrat, prin baricentrul ariei de plutire. Să considerăm corpul în poziția înclinată cu unghiul α. Luăm axa z verticală descendentă. Energia potențială a solidului față de planul de plutire actual $M'N'$, vecinul celui normal MN, este $-G_0 z_G$ (*minus*, fiindcă planul de referință este deasupra). In ceeace privește lichidul, aceasta poate fi considerat ca diferența dintre întreaga masă lichidă, completată fictiv, astfel ca să umple și spațiul ocupat de corp până la planul de apă, și masa fictivă introdusă astfel în spațiul carenei; rezultă că energia potențială a lichidului la oricare din pozițiile considerate, cu nivelul invariabil, va fi egală cu o cantitate constantă, din care se scade partea aferentă lichidului deplasat. Această din urmă parte se poate evalua, compunând carena actuală din carena normală și volumele unghiulare în plus și în minus.

Lăsând de o parte constanta, care nu influențează căutarea minimului, vom calcula energia potențială W_α a restului.

Carena normală va procura termenul $-G_0 z_C$ (greutatea lichidului deplasat înmulțit cu ordonata lui C) care, pentru scădere, va trebui luat cu semnul schimbat, deci $+G_0 z_C$.

Volumul unghiular $N'N\eta$, care sporește carena normală, va da analog un termen pozitiv. Dar și volumul $MM'\eta$ va da un termen pozitiv, fiindcă, deși reprezintă o micșorare de carenă, volumul se află de cealaltă parte, adică deasupra planului de referință.

De altfel, aceasta va rezulta de la sine, considerând pe z și x, în calculul ce urmează, drept cantități algebrice.

Fie a segmentul de dreaptă CG (Fig. 87), socotit pozitiv când G este deasupra lui C; unghiul de înclinare α al planului MN față de $M'N'$ va fi egal cu înclinarea segmentului CG față de verticală. Vom avea: $z_C - z_G = a \cos \alpha$, astfel că suma primilor doi termeni ai energiei potențiale W_α se va exprima prin: $G_0 a \cos \alpha$.

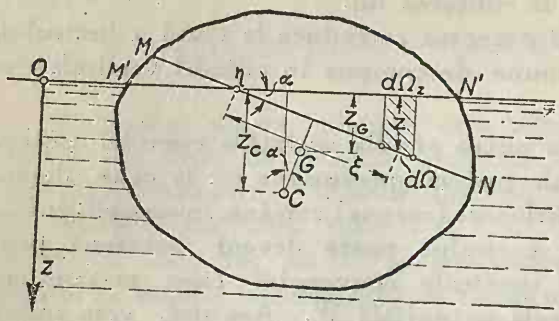


Fig. 87

Energia potențială a volumelor unghiulare se obține, înmulțind greutatea cilindrului elementar, normal pe $M'N'$, corespunzător unui element $d\Omega$ al ariei MN și având o înălțime z, cu ordonata $\frac{z}{2}$ a centrului său de greutate, și integrând pe toată aria MN. Găsim astfel, în mărime și semn, pentru un element:

$$\frac{1}{2} \varpi \xi^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \, d\Omega$$

și deci

$$W_\alpha = G_0 a \cos \alpha + \frac{\varpi}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \int \xi^2 \, d\Omega$$

cu

$$G_0 = \varpi V = \varpi \Omega h_0 \quad \text{și} \quad \int \xi^2 \, d\Omega = I,$$

h_0 fiind adâncimea medie de imersiune.

Termenii din membrul al doilea sunt finiți, dar cum nu ne interesează decât minimul lui W_α, vom conserva numai variațiile lor infinit mici de ordinul proxim care intervine și care este 2. Aceasta apare, dacă înlocuim în membrul al doilea $\cos \alpha$ prin primii doi termeni ai desvoltării lui: $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ iar pe $\sin \alpha$ prin *echivalentul* (adică egal, cu aproximația unui infinit mic de ordin superior) său α.

Lăsând la o parte, așa dar, termenul constant, adică inde-

pendent de α, vom obține ca parte variabilă a energiei potențiale infinitul mic de ordinul al doilea:

$$\delta W_\alpha = \frac{\varpi}{2}\alpha^2 (I - aV) = \frac{\varpi}{2}\alpha^2 \Omega (r^2 - a h_0).$$

Prin urmare, pentru a avea stabilitate la o inclinațiune infinitizimală α, adică W_α să fie un minim, creșterea de mai sus a potențialului din poziția normală de echilibru trebue să fie pozitivă.

Această condiție, dacă a este negativ, adică G se află sub C, este totdeauna îndeplinită. În cazul contrar a trebue să fie mai mic ca $\frac{r^2}{h_0}$, unde r este raza de girație a lui Ω față de axa de înclinație respectivă. Regăsim astfel condiția de stabilitate a plutitorului, la care s'a ajuns înainte pe o cale cu totul diferită.

Această condiție trebue evident îndeplinită pentru orice plan de inclinație, adică pentru orice valoare a lui r.

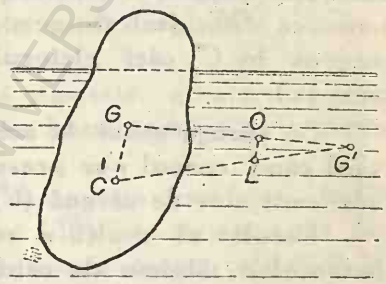


Fig. 88

Notă. Condiția de stabilitate se mai poate interpreta și în modul următor cu aceiași concluzie.

Fie (Fig. 88) Q greutatea și G' centrul de greutate al masei lichide. Centrul de greutate general, adică al sistemului format din corp și lichid, se găsește pe linia GG' într'un punct O, care împarte această linie în raportul

$$\frac{Q}{G_0}.$$

Să ne închipuim acum că solidul este suprimat, golul lăsat în lichid fiind umplut cu o masă suplimentară din același lichid. Greutatea acestei mase va fi G_0, iar centrul ei de greutate se va găsi în centrul de carenă (în poziția inclinată: C') astfel că, pentru sistemul lichidului completat în acest mod, centrul de greutate se va găsi pe $C'G'$ în L, care împarte această linie în același raport.

Punctul L astfel definit, fiind centrul de greutate al unui sistem de mase (lichide) invariabil, va fi evident un punct fix și LO va fi paralel cu $C'G$. Rezultă că

$$\frac{LO}{C'G} = \frac{G_0}{G_0 + Q}.$$

Dacă plecăm, așa dar, dela situația normală și schimbăm orientarea corpului plutitor în mod isocaren, vectorii LO și $C'G$, cari aveau anumite valori când erau verticali, își vor conserva și paralelismul și proporționalitatea. Condiția de stabilitate fiind ca O să fie cât mai jos posibil, urmează ca proecția pe verticală, adică pe normala în C' la suprafața (C), a segmentului LO cu originea în L și deci a lui GC' cu origina în G să fie mai mare ca GC din poziția de plutire.

Dar proecția lui GC' pe normala din C' este egală cu perpendiculara dusă din G pe planul tangent în C' la suprafața (C).

Pentru ca această perpendiculară să fie mai mare ca GC trebue a fortiori ca GC' să fie mai mare ca GC, adică GC să fie un minimum absolut. Condiția de altfel este și suficientă, deoarece dacă GC este un minim, nu numai GC' va fi mai mare ca GC dar și perpendiculara dusă din G pe planul tangent în C', căci piciorul ei va cădea evident în afara suprafeței (C).

Se ajunge exact la aceeași condiție a echilibrului stabil, în cazul când corpul s'ar presupune că ar putea rezema prin suprafața centrelor de carenă (C) pe un plan orizontal fix.

Rezultă că pozițiile respective ale plutitorului corespund distanțelor minime ale centrului de greutate G la suprafața (C).

8. Oscilațiuni de rotație în jurul pozițiilor de echilibru stabil.

Independent de oscilațiile verticale descrise, să studiem acum oscilațiile rotative, pe cari un plutitor le execută în jurul unei axe instantanee orizontale, în general variabile, ce trece prin centrul lui de gravitate, pendulând de oparte și de alta a poziției lui de echilibru stabil. Asemenea oscilații iau naștere d. e. dacă corpul, fiind odată deplasat din poziția lui de echilibru cu o inclinație foarte mică α, este lăsat, fără forță vie inițială, în voia lui. Vom presupune că, în poziția deplasată, carena este egală cu aceea normală, pentru a elimina oscilațiunile verticale, cari, altfel, s'ar amorsa și ele, suprapunându-se cu cele de rotație.

Greutatea corpului și subpresiunea, cari într'o asemenea poziție formează un cuplu vertical, tind să învârtească corpul în jurul unei axe perpendiculare pe planul cuplului (și deci pe gg'), adică orizontală, trecând prin centrul de greutate G al corpului,

şi care în general nu este paralelă cu axa de inclinaţie $O\eta$, formând cu aceasta, după cum am văzut, unghiul $\chi = \frac{\pi}{2} - \beta$ (vezi fig. 86) egal cu acela format de gg' cu $O\xi$.

Să luăm ca plan de figură planul de inclinaţie, care conţine axa de plutire normală, iar perpendicular pe acesta, planul de plutire normal MN; fie $M'N'$ planul de plutire în poziţia înclinată, căruia îi corespunde centrul de carenă C', proectat în c' (Fig. 89).

Fie μ metacentrul corespunzător axei de inclinaţie considerate $O\eta$. Am văzut că există cel puţin două planuri de înclinaţie (cele două principale), pentru cari C' coincide cu c', şi atunci verticala centrului de carenă C' cade şi ea în planul figurei, iar μ' coincide cu μ. Aceasta se întâmplă anume totdeuna pentru planurile normale principale ale suprafeţei (C) în C, cari corespund axelor principale de inerţie ale ariei de plutire, luate ca axe de inclinaţie.

Dacă aria de plutire are axe de simetrie, aceste axe sunt, cum se ştie, şi axe principale de inerţie, bucurându-se prin urmare de proprietatea menţionată.

In cazul particular când elipsa de inerţie este cerc, indicatricea curburelor din C ale suprafeţei (C) fiind deasemenea cerc, toate axele de inclinaţie vor avea menţionata proprietate ($\beta = 90^0$), care atrage paralelismul exei de învârtire prin G cu axa de inclinaţie şi, prin urmare, după prima semioscilaţie noua axă de inclinaţie va avea aceeaşi direcţie, fără în general a se menţine şi ca poziţie.

Intradevăr, planul MN în timpul redresării va lua, la un moment dat, poziţia orizontală, fără a coincide cu planul de apă $M'N'$, de cât în cazul când perpendicularele GQ şi GQ' pe planurile de plutire respective ar fi egale, sau ar diferi între ele cu un infinit mic de un ordin superior lui α. Numai în acest caz am avea oscilaţii cu adevărat isocarene şi deci pur rotative, G rămânând fix în timpul oscilaţiilor. Pentru a avea acest caz, trebue îndeplinită condiţia:

$$\lim \frac{GQ' - GQ}{\alpha} = 0.$$

Cum

$$GQ = \overline{G\eta} \cos\theta \quad \text{şi} \quad GQ' = \overline{G\eta} \cos(\theta + \alpha),$$

α putând fi considerat ca creștere infinitezimală a lui θ, limita de mai sus revine la derivata lui GQ în raport cu θ, adică:

$$\lim \frac{GQ' - GQ}{\alpha} = -\overline{G\eta} \sin \theta .$$

Condiția menționată se reduce în consecință la $\sin \theta = 0$ sau $\theta = 0$, adică axa de plutire trebue să întâlnească axa de inclinație. Dacă această condiție este îndeplinită pentru două axe de inclinație, Q va coincide cu baricentrul O al ariei de plutire, deoarece pentru deplasări isocarene axele de inclinație trec toate prin O.

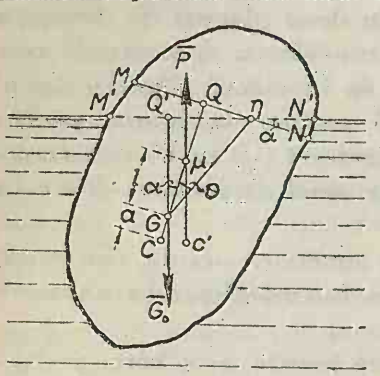


Fig. 89

Rezultă că numai dacă axa de plutire înțeapă aria de plutire normală în baricentrul ei O, vom avea oscilații rotative *isocarene* pentru cele două direcții principale de inclinație. In celelalte cazuri, se vor provoca și oscilații verticale.

Cuplul $\overline{G_0}$, $\overline{P}$ nefiind însă în general în planul figurei, axa instantanee de rotație ce trece prin G perpendicular pe CC'' nu va fi paralelă cu axa de inclinație și, din această cauză, noua axă de inclinație, chiar dacă condiția $\theta = 0$ ar fi satisfăcută, nu-și va menține direcția anterioară. Va exista deci o *precesiune* a axei de înclinație, care va antrena la rândul ei o precesiune a axei de rotație. Numai oscilațiile după direcțiunile principale își conservă direcția acestor axe, cari sunt astfel permanente.

Oscilațiile se pot descompune, componetele evoluând în mod independent una de alta, astfel că studiul lor se poate face separat.

In cele ce urmează vom considera cazul general (C' diferit de c') însă numai cu oscilații isocarene (deci cu condiția $\theta = 0$) în jurul unei axe de rotație trecând prin G. La noua învârtire a planului MN în jurul unei axe orizontale neparalelă cu $O\eta$, singura direcție neinclinată din MN, acest plan nici un moment nu va mai redobândi poziția orizontală, același lucru putându-se repeta pentru $M'N'$ și așa mai departe, exact după cum un corp, rezemat cu suprafața (C) pe un plan orizontal, ar oscila în direcțiuni variabile.

Oscilațiunile isocarene în chestiune din cazul general se pot la rândul lor descompune în oscilații de rotație după două axe

orizontale dreptunghiulare GH şi $G\Xi$, paralele cu axele $O\eta$ şi $O\xi$. Această descompunere este valabilă numai pentru prima semi-oscilaţie, căci $O\eta$ şi $O\xi$ schimbându-se, GH şi $G\Xi$ se vor schimba de asemenea. In cazul particular al direcţiilor principale, una din componente este evident nulă şi cealtă este permanentă.

Să luăm ca axe de referinţă în planul MN axele deptunghiulare $O\xi$ şi $O\eta$, ultima fiind chiar axa de înclinaţie (Fig. 83), iar O fiind baricentrul ariei de plutire, şi să studiem mai întâiu rotaţia în jurul axei GH sub acţiunea proecţiei cuplului $\overline{G}_0$, $\overline{P}$ pe planul de inclinaţie.

Vom evalua mai întâiu momentul, proporţional cu α, al acestei proecţiuni de cuplu, şi pentru aceasta este suficient a se cunoaşte distanţa $C\mu$ a metacentrului corespunzător, de poziţia căruia e legată şi stabilitatea corpului cu privire la axa de înclinaţie $O\eta$.

Or, avem

$$\overline{C\mu} = \frac{I_\eta}{V} = \frac{r_\eta}{h_0} = \rho_\eta ,$$

astfel că, punând $CG = a$ şi $G\mu = l_\eta = \rho_\eta - a$, momentul căutat va fi în mărime şi semn, dacă facem aceeaşi convenţie pentru sensul momentelor şi sensul unghiurilor α:

$$M_\eta = -G_0 l_\eta \alpha = -\varpi V l_\eta \alpha ,$$

cu semnul —, întru cât în caz de stabilitate M_η şi α sunt de sensuri contrarii. Lungimea l se numeşte *înălţimea metracentrului* (deasupra centrului de greutate). Pentru a stabili ecuaţia mişcării de rotaţie a corpului în jurul axei orizontale GH, proectată în G, vom considera, după principiul lui *d'Alembert*, atât forţele cuplului menţionat cât şi forţele de inerţie ale maselor elementare dm, exprimând *echilibrul* lor *dinamic*, adică egalând cu zero suma momentelor, în raport cu axa G, ale tuturor acestor forţe.

Forţele de inerţie dau: $-\int_m dm \frac{dv}{dt} r$, unde r este distanţa masei elementare dm la axa de oscilaţie (rotaţie) GH şi $v = \frac{d\alpha}{dt} r$ vitesa masei. Aşa dar vom avea:

$$-\frac{d^2\alpha}{dt^2}\int_m r^2 dm + M_\eta = 0 \quad \text{şi cum} \quad dm = \frac{\varpi_0}{g} dV_0 ,$$

unde dV_0 este volumul elementar al corpului şi ϖ_0 greutatea volumică respectivă, schimbând semnele, vom scrie:

$$\frac{1}{g}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\int_{V_0} \varpi_0 r^2 dV_0 + \varpi V l_\eta \alpha = 0 .$$

Dar $\int_{v_0} \frac{\varpi_0}{g} r^2 dV_0$ este momentul de inerţie polar al masei corpului în raport cu axa de rotaţie. Acest moment, *în cazul particular al unui corp omogen*, va fi:

$$\frac{\varpi_0}{g}\int_{V_0} r^2 dV_0, \text{ unde } \int_{V_0} r^2 dV_0 = V_0 k_\eta^2,$$

este momentul de inerţie polar al volumului corpului în raport cu axa de rotaţie, k_η fiind raza de giraţie respectivă. Cum pe de altă parte $\frac{\varpi_0}{g} V_0 = \frac{G_0}{g} = \frac{\varpi V}{g}$, ecuaţia de mai sus se reduce, pentru un corp omogen, la

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g l_\eta}{k_\eta^2}\alpha = 0$$

de forma

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2 \alpha = 0,$$

ν fiind egal cu $\frac{\sqrt{g l_\eta}}{k_\eta}$.

Dacă $l = \rho_\eta - a$ este pozitiv, singurul caz în care ν este real, această ecuaţie, analoagă cu aceea a oscilaţiilor verticale, reprezintă oscilaţiuni rotative de o parte şi de alta a poziţiei $\alpha = 0$, cantităţile $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ şi α fiind de semne contrare (adică cuplul, care produce acceleraţia $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, lucrând în sensul invers deplasării, ceeace, după cum am menţionat, este propriu poziţiilor vecine unui echilibru stabil). Durata unei oscilaţiuni este: $T_\eta = \frac{2\pi k_\eta}{\sqrt{g l_\eta}}$ ca şi a unui pendul de o lungime redusă, egală cu k_η^2/l_η.

Dacă $l_\eta < 0$ (cuplul şi deplasarea de acelaşi sens) şi deci ν imaginar, deplasarea creşte continuu după o funcţiune exponenţială, astfel că, la cea mai mică deplasare, corpul se răsfoarnă din poziţia lui de echilibru, care este prin urmare nestabil (practic irealizabil).

In fine, în cazul $l_\eta = 0$ avem $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$ şi corpul se află în echilibru indiferent, privitor la înclinaţiunile în direcţia η.

In afară de componenta de cuplu M_η, care lucrează în jurul axei GH dusă prin G, putem considera şi componenta M_ξ în jurul axei orizontale $G\Xi$ trecând prin G, perpendicular pe cea dintâiu (oscilaţiunile rezultante, adică cele reale, având loc în jurul axei normale pe planul cuplului de îndreptare).

Aplicând în C două forţe $\overline{P}$ şi $-\overline{P}$ egale şi de sens opus, cuplul de îndreptare se va găsi descompus în cele două cupluri, $\overline{G_0}, \overline{P}$ (în G şi C), cuplul stabilităţii de greutate, şi $-\overline{P}, \overline{P}$ (în C şi C'), cuplul stabilităţii de formă.

Pentru M_ξ vom profita de faptul că, planul primului cuplu fiind paralel cu $O_\xi // G\Xi$, momentul lui în raport cu aceste axe este nul, şi ne vom mărgini a lua numai momentele forţelor care constitue cuplul stabilităţei de formă, introdus prin modificarea subpresiunei, şi cari se pot înlocui, precum am văzut, prin forţele elementare la cari conduce descompunerea volumelor unghiulare. Fiind vorba de un cuplu, momentele se pot lua nu numai în raport cu axa $G\Xi$ ci şi cu ori ce altă axă paralelă, d. e. $O\xi$ din planul MN. Vom lua deci momentele forţelor elementare $\varpi\alpha\xi d\Omega$, în raport cu $O\xi$:

$$M_\xi = \varpi\alpha \int_\Omega \xi\eta \, d\Omega = \varpi\alpha \, \mathcal{M}_{\xi\eta},$$

unde $\mathcal{M}_{\xi\eta}$ este momentul centrifug al ariei de plutire Ω faţă de axa de inclinare O_η şi axa $O\xi$, perpendiculară pe prima. Ştim că acest moment se anulează dacă cele două direcţiuni $O\xi$ şi $O\eta$ *sunt axe principale de inerţie ale suprafeţei* Ω *în raport cu* O, şi deci oscilaţia componentă după axa $O\xi$ este în acest caz nulă, ceea ce ştiam.

Această condiţie este îndeplinită dacă $O\eta$, care în orice caz trece prin baricentrul lui Ω, este axă principală de inerţie, în care caz orice dreaptă $O\xi$, perpendiculară pe $O\eta$, va fi şi ea axă principală de inerţie în raport cu punctul de intersecţie. Pentru a fixa ideile, am luat origina O chiar în baricentrul lui Ω.

Se verifică deci că, în cazul direcţiunilor principale ale elipsei de inerţie, nulitatea lui $\mathcal{M}_{\xi\eta}$ antrenează $M_\xi = 0$ adică paralelismul între axa $O\xi$ şi braţul CC', astfel că planul cuplului stabilităţei de formă va fi chiar planul de inclinaţie, care va cuprinde deci şi pe C'. In celelalte cazuri el va forma cu $O\eta$ un unghiu β, diferit de 90^0.

In toate cazurile vom avea:

$$M_\xi = G_0\, CC' \cos\beta,$$

unde $\cos\beta$ se anulează odată cu $\mathcal{M}_{\xi\eta}$, anume atunci când C' coincide cu c', în care caz axa de învârtire prin G va fi paralelă cu axa de inclinație și direcția lor comună se va menține în timpul oscilațiunilor. Dacă în același timp axa de plutire trece prin axa de inclinație ($\theta = 0$), oscilațiunile amorsate vor fi pur rotative, astfel că, atât axa de inclinare cât și cea de învârtire vor rămâne neschimbate și ca orientare și ca altitudine.

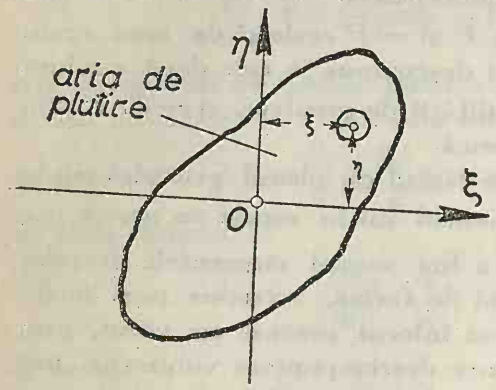


Fig 90

In fine, dacă elipsa de inerție a lui Ω se reduce la un cerc, avem o infinitate de axe principale și deci de direcții de oscilație fixe.

Din faptul că în general numai două axe de oscilație sunt fixe, oricare alta schimbându-se după fiecare semioscilație, rezultă că, după o inclinare inițială, care ar provoca oscilațiile, prin schimbarea continuă a inclinației va veni și rândul oscilării după una din direcțiile principale, cu tendința oarecum de a se permanetisa.

La vasele plutitoare, mișcarea oscilatoare în jurul axei principale longitudinale ce trece prin G se numește *ruliu*, iar acea în jurul axei principale transversale prin G, *tangaj*. Pentru aceste două mișcări intervin razele principale de girație, respectiv, ale ariei de plutire și ale masei vasului, cari raze, cu o grosieră aproximație, se pot considera ca respectiv proporționale. Razele relative la axa longitudinală reprezintă valori minime, iar acelea relative la axa transversală valori maxime. Stabilitatea, având ca măsură brațul

$$l_\alpha = \left[\frac{r^2}{h_0} - a\right]\alpha$$

al cuplului, este minimă la ruliu și maximă la tangaj. In același sens, însă într'un grad mai mic, variază și durata de oscilație T.

Studiul de mai sus presupune pe α foarte mic și neglijează frecările, cari în realitate *amortizează* oscilațiile, astfel că

în realitate mişcarea este mai complicată, apoi şi din cauza modificării carenei în timpul mişcării.

In practică interesează oscilaţiile *înfrefinute*, datorite *hulei*, fenomen de care ne vom ocupa pe scurt mai departe.

9. Curbe de stabilitate.

După cum s'a spus mai sus, cuplul de moment $M = -G_0 l\alpha$, care poate fi numit şi cuplu de *stabilitate totală*, poate fi privit ca rezultând din două cupluri, cari apar prin aplicarea în C a două forţe opuse (Fig. 91), egale cu greutatea corpului sau cu subpresiunea; deci $\overline{P}$ în sus şi $-\overline{P}$ în jos:

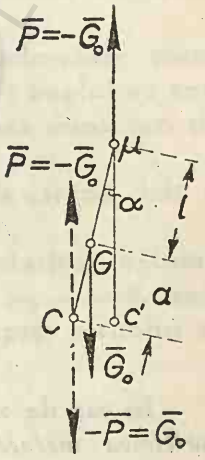


Fig. 91

a) *cuplul stabilităţii de greutate* $G\,a\alpha$, care în cazul obişnuit când G este deasupra lui C, a fiind pozitiv, este un cuplu de răsturnare, având acelaşi sens cu α;

b) *cuplul stabilităţei de formă* $-G_0 \frac{I}{V}\alpha = l\overline{\omega}\alpha$, căruia i se datoreşte de obiceiu stabilitatea efectivă. Acest cuplu provine din modificarea formei carenei, care atrage deplasarea centrului subpresiunei din C în C' şi, precum am văzut, se poate înlocui prin cuplul dat de volumele unghiulare, din care unul reprezintă o creştere a carenei (forţă de subpresiune adaosă) celălalt o micşoare a carenei (forţă îndreptată în jos).

Stabilitatea totală iniţială (adică pentru α infinitezimal), exprimată prin momentul cuplului de îndreptare $-G_0 l\alpha$, pentru aceleaşi G_0 şi α este caracterizată şi se măsoară prin $l = \frac{I}{V} - a$.

Vapoarele transatlantice au l de circa $0{,}3\,m$, iar cuirasatele, cari reclamă o mai mare stabilitate, au l egal $1\,m$ şi mai mult.

In aceleaşi condiţiuni, stabilitatea de formă iniţială, reprezintată prin cuplul $G_0 \frac{I}{V}\alpha = -\overline{\omega} l\alpha$ în *imediata vecinătate a planului de plutire normal*, depinde numai de aria de plutire şi anume de momentul ei de inerţie I.

Această stabilitate creşte dacă, la nivelul planului de plutire, se înconjoară vasul cu o centură de lemn (*suflaj*).

Să considerăm un plutitor *cu două planuri de simetrie* și să studiem separat înclinațiunile după aceste planuri (*ruliu* și *tangaj*) pentru *valori crescânde finite ale lui* α.

La un mare număr de vase, desfășurata secțiunei suprafeței centrelor de carenă, corespunzătoare ruliului, are forma urcândă după mm' și scoborândă după $m'm''$ (Fig. 92).

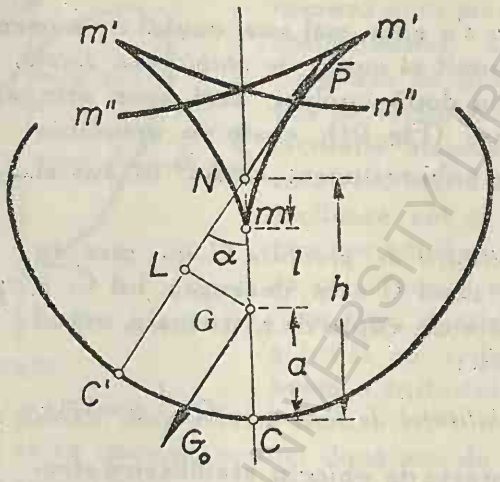


Fig. 92

In caz de α finit, $GN = h - a$ înlocuește pentru stabilitate *înălțimea metacentrică* inițială Gm. GN este depărtarea lui G de punctul unde NC', normala în C' la curba de contur aparent a lui (C) (corespunzătoare înclinării α) și care se obține ducând din C' tangenta la desfășurata curbei taie normala din C. Momentul cuplului de îndreptare va fi: $M = -(h - a) \sin \alpha \, G_0$.

In cazul limită (α infinit de mic), când N vine în m, avem ca mai sus: $M = -G_0 \left(\frac{I}{V} - a\right)\alpha$, unde $\frac{I}{V} = \rho$ reprezintă raza de curbură Cm a secției drepte a cilindrului de contur aparent longitudinal al suprafeței (c), care aici coincide cu secțiunea suprafeței (C) prin planul de înclinație.

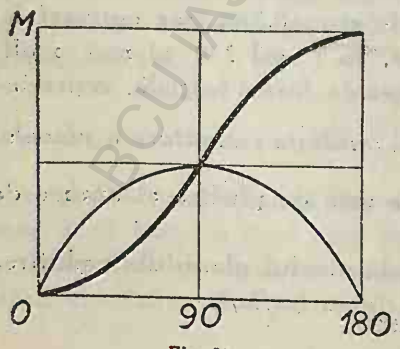


Fig. 93

Se vede că metacentrul m (acel micul metacentru) nu intervine de fapt în stabilitate de cât în momentul inițial, fiind apoi înlocuit prin N.

Când α crește, h crește pe ramura mm' iar pe $m'm''$ dela un anumit

punct începe să descrească. Stabilitatea trece prin un maxim. La unele vase după un maxim urmează un minim relativ și un al doilea maxim. *Curba stabilității statice* (Fig. 93, curba subțire) reprezintă cuplul de mai sus în funcție de α, iar *curba stabilității dinamice* (curba groasă) reprezintă lucrul corespunzător:

$$\mathfrak{T} = \int_0^{\alpha} M\, d\alpha = \int_0^{\alpha} G_0 (h - a) \sin \alpha\, da \cdot$$

Curba statică se deduce din ceea dinamică prin derivare.

Dacă curba metacentrică se reduce la vârful ei m, h va fi constant și egal cu raza de curbură în (C) a secțiunei suprafeței $\mathcal{C}$, iar curba statică va fi o sinusoidă.

La vasele navigabile maximul cuplului de îndreptare corespunde unui unghiu $\alpha < 90^0$, care poate atinge 80^0; cuplul se anulează pentru o anumită valoare a lui α, care diferă după caz, dar care poate întrece 90^0.

Incercările de stabilitate pentru o formă de carenă dată se face pe modele reduse la $1/100$ sau $1/50$.

La un vas navigabil se poate considera ca plutitor volumul limitat de peretele exterior și de *punțea efanșă superioară*, care, pentru o încărcătură medie, se găsește deasupra planului de plutire.

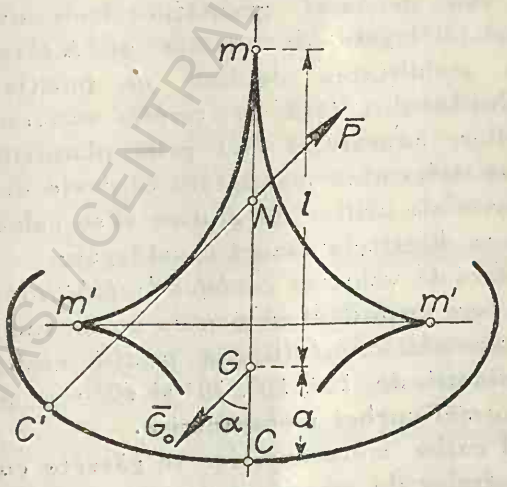


Fig. 94

Ruliul poate atinge uneori $35^0 - 40^0$. Dacă desfășurata curbei centrelor de carenă își are vârful m îndreptat în sus, GN scade când α crește și stabilitatea s'ar putea atunci anula pentru un α mic, în cazul când înălțimea metracentrului $l = \frac{I}{V} - a$ este mică (d. e. pentru unghiul din fig. 94, dacă G s'ar găsi în N).

10. Aplicaţie la vasele navigabile.

Geometria vaselor navigabile se reduce la calculul suprafeţei înfăşurate (P) a planului de plutire şi al suprafeţei centrelor de carenă (C), în ipoteza simplificatoare a două planuri de simetrie, *longitudinalul* sau *diametralul* şi *transvesalul* sau *latitudinalul*. Acesta din urmă nu este riguros un plan de simetrie, deoarece jumătatea vasului dinainte, adică dispre *pro*ră, diferă de jumătatea dinapoi adică dinspre *pupă*. Calculul se mărgineşte de altfel la secţiunile acestor suprafeţe prin cele două planuri menţionate.

In toate cazurile se începe prin a se alege o suprafaţă ce limitează plutitorul în exterior. In afară de părţile dianainte şi dinapoi, unde formele sunt subţiate — mai mult partea dinapoi spre a se reduce vârtejurile dela pupă —, secţiunile drepte ale vaselor mari, prin planuri verticale normale pe longitudinal, sunt dreptunghiulare, formă proprie pentru stabilitate.

Forma exterioară fiind aleasă, pentru fiecare greutate a plutitorului, adică pentru fiecare volum de carenă, rezultă câte o suprafaţă de plutire (P) şi o suprafaţă de centre de carenă (C), formând două familii de suprafeţe, din cari se iau în consideraţie numai suprafeţele extreme — vasul pe *lest* şi vasul în *plină sarcină* —, calculându-se la ele numai secţiunile prin planurile de simetrie. In repartiţia sau *arimajul* greutăţilor (compuse din carcasă, corpurile invariabil legate de aceasta şi încărcătură), se are în vedere că stabilitatea depinde de poziţia centrului de greutate al plutitorului faţă de *curbele metacentrice* (desfăşuratele secţiunilor suprafeţei (C) prin planurile de simetrie). In acest scop se determină mai întâiu centrele de carenă şi momentele de inerţie ale ariilor de plutire şi se calculează cuplul de stabilitate pentru diferitele cazuri considerate.

Dacă, în afară de valoarea *cuplului de stabilitate iniţială* (α fiind foarte mic), se cere cuplul M şi pentru toate inclinaţiile până la aceea pentru care *platbordul* (limita punţii etanşe) începe a se cufunda — inclinaţii de 10^0, 20^0, 30^0 şi 40^0 —, se procedează la determinarea formei curbei metacentrice.

In general curba metacentrelor se găseşte cu mult mai sus decât curba centrelor de carenă şi decât vasul (Fig. 95).

Stabilitatea pentru tangaj nu e nevoie a fi examinată, ea fiind totdeauna mare.

Adausurile de greutăţi deasupra punţii micşorează stabilitatea prin ridicarea centrului de greutate, ceeace constitue o

dificultate specială la cuirasate, cari au tocmai nevoie de o mare stabilitate pentru tragere (artileria se așează lângă planul de plutire; de asemenea și cuirasa, care se așează deasupra apei și puțin sub apă, căci grație rezistenței apei restul carcasei este apărat dela sine contra tirului dela distanțe mari, de ordinul de *10 km*). Concomitent însă cu micșorarea stabilității prin urcarea lui *G*, adică micșorarea lui *l*, sporește perioada ruliului, ceeace este favorabil pentru tir.

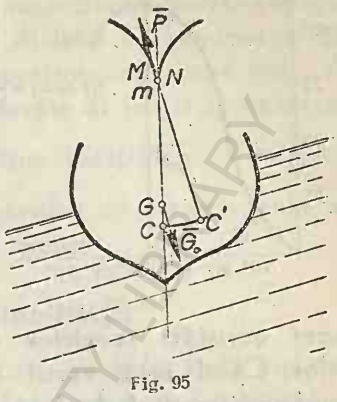


Fig. 95

Dacă voim a păstra acest avantaj pentru precizia tirului la cuirasate, atunci, spre a compensa micșorarea stabilității datorită reducerei înălțimii metacentrice *l*, trebuesc luate precauțiuni și mai mari de a nu încărca accidental puntea. Totuși este preferabil, în loc de a micșora prea mult, în dauna stabilității, înălțimea metacentrică *l* pentru scopul arătat, să se mărească numărătorul *k* din expresia perioadei, prin lărgirea vasului și îndepărtarea de axă a greutăților mari — tunurile grele și blindajul —.

Pentru trasarea curbelor de stabilitate (Fig. 96) se ia de obiceiu ca ordonată, d. e. în *cm*, brațul cuplului de îndreptare $(h - a) \sin \alpha$, iar ca abscisă, pe o scară arbitrară, unghiul de înclinare în *radiani*.

Pentru α foarte mic, $h - a$ fiind aproximativ constant și egal cu *l*, tangenta la origină (al cărei coeficient unghiular, evaluat prin raportul ordonatei către abscisă, fiecare măsurată pe scara ei, este $l \cos \alpha \cong l$) taie verticala $\alpha = 1$ (în grade $57°,3$), la ordonata $l = \frac{I}{V} - a$, care în figură s'a întâmplat să fie de *50 cm*.

In privința formei curbei metacentrice, aceasta depinde de forma vasului. Dacă, precum este regula obișnuită, aria Ω a planului de plutire crește prin înclinare, *I* crescând va mări raza de curbură $\rho = \frac{I}{V}$, iar *N* se va ridica pe curba metacentrică, astfel că la creșterea lui α stabilitatea va spori atât prin urcarea lui *N* cât și prin creșterea lui $\sin \alpha$. Dacă Ω descrește *N* se va scoborâ, rămânând în favoarea stabilității numai creșterea lui $\sin \alpha$.

In cazul când corpul se află complet cufundat în apă (torpiloare), *I* este nul pentru orice axă de înclinație și $l = -a$.

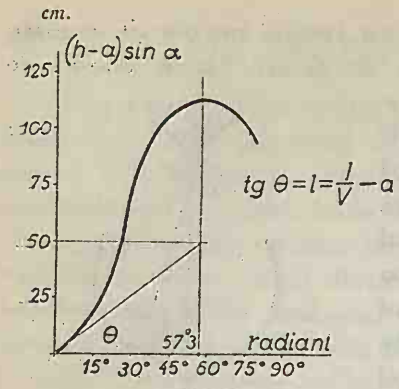


Fig. 96

Metacentrele se vor cufunda atunci cu C și, pentru stabilitate, va trebui ca $l > 0$ sau $a < 0$ adică G să fie sub C, ceeace de altfel s'a mai spus la capitolul corpurilor cufundate.

Calculul *a priori* al lui l și al razei de inerție polară k e foarte dificil din cauza formei vasului, care nu se poate defini analitic, precum și din cauza repartizării arbitrare a maselor. Admiterea unei greutăți specifice *uniforme* ϖ_0 înlesnește aplicarea formulelor. Când însă vasul e construit gata, l și k se obțin în mod exprimental, deplasând transversal pe vas, la o distanță x, o greutate cunoscută G_1, ceeace dă loc la o înclinare, d. e. de $3^0 - 5^0$ (Fig. 97). Cum în poziția inclinată subpresiunea P va trece aproximativ — ar fi riguros exact numai pentru α infinitizemal — prin metacentrul respectiv, luând momentele forțelor în raport cu axa orizontală prin G (centrul de greutate primitiv al vasului), paralelă cu axa de înclinație, va trebui să exprimăm, pentru echilibrul în noua poziție, că momentul subpresiunei, adică $G_0 l \alpha$, este egal și de sens contrar cu momentul greutății G_0, care este acum aplicat într'un alt punct G', pe verticala lui C'. Ori, momentul greutății, care înainte de deplasare era nul în raport cu G, s'a modificat prin deplasare cu cantitatea $xG_1 \cos \alpha \cong xG_1$; de unde egalitatea: $G_1 x = G_0 l \alpha$, care ne procură pe l.

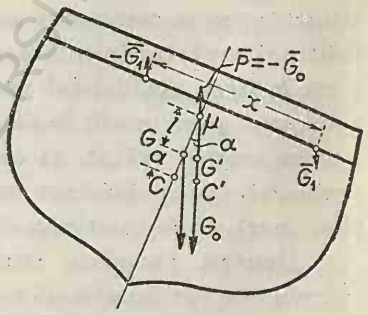


Fig. 97

Raza de inerție polară k rezultă apoi din durata unei oscilațiuni $T = \frac{2\pi k}{\sqrt{gl}}$ în stare de încărcare normală a vasului. In k astfel măsurat intră forțat și masa lichidului deplasat periodic, astfel că suntem conduși a întebuința un k fictiv, acela care de fapt are utilitate practică.

Dacă se fac experiențe cu modele asemenea, reduse în raportul $1/\lambda$, perioada măsurată la model va trebui înmulțită cu $\sqrt{\lambda}$ pentru a ne da pe aceea a vasului real. Astfel la un model $1/100$,

perioada constatată va trebui înmulțită cu *10* pentru a ne da pe ceea căutată.

Ruliul provocat, dar neîntreținut, se amortizează foarte repede.

Dispoziția arbitrară a maselor face dificilă determinarea directă a lui *G*. De aceea din *I*, găsit experimental, după cum s'a indicat mai sus, și din momentul de inerție al lui Ω și valoarea carenei *V*, cari se cunosc ușor, se obține înălțimea: $a = \frac{I}{V} - l$ a centrului de greutate *G* deasupra centrului de carenă, care se poate ușor construi.

11. Studiul practic al stabilității.

a) *Valurile și ruliul propriu zis în timp de hulă.* Prin *val* sau *undă* înțelegem o neregularitate a suprafeței apei care înaintează, mișcarea moleculelor fiind totuși limitată. Ea poate apare fie ca *undă solitară**), fie ca o serie de ridicături și depresiuni ce alternează, uniform repetate. Ultimul caz se formează sub influența vântului sau furtunei, producându-se în multe locuri ale suprafeței o mișcare treptat crescândă, apoi un timp oarecare uniformă și în fine descrescândă.

După *Scoff-Russel* distingem:

1°. *Unde progresive* sau *călătoare*, produse d. e. prin înaintarea vaselor (unde de *remuu*).

2° Unde *oscilante* sau *hulă*, cum sunt valurile mării, etc.

După adâncime se disting: *unde de adâncime și de fund.*

b) *Forma valurilor.* Forma valurilor este cicloidală sau de o formă analoagă (Fig. 99 și 100 cari însă trebuesc răsturnate), iar mișcarea particulelor de apă se face după traectorii circulare sau eliptice și anume: la undele de remuu în semicercuri sau semielipse, iar la hulă în cercuri sau elipse întregi, astfel că, de fapt, nu intervine nici o mișcare de înaintare, ci orice particulă, după descrierea traectoriei ei, se înapoiază la locul de unde a plecat — neglijând deplasarea la suprafață, datorită vântului —. Diametrul traiectoriilor este maxim la suprafață și descrește pentru particulele mai adânci până la zero, după o anumită lege (vezi mai departe).

*) Produsă la suprafața inițial liniștită, prin umflare sau depresiune bruscă, datorită implusiunei unui corp (vas), ce se pune în mișcare, sau unei variații bruște a debitului. Astfel, prin vărsarea bruscă, la intrarea într'un canal, a unei cantități oarecare de apă, se produce o *umflare* care se propagă dealungul canalului. Undele solitare negative sunt formate din *depresiuni*, cum ar fi de ex. la deriyarea bruscă a unei cantități de apă dintr'un canal.

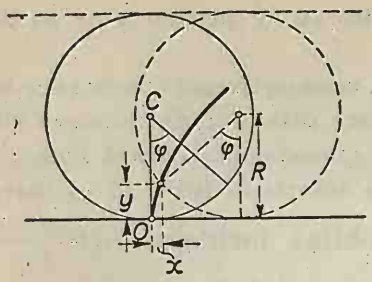


Fig. 98

Curbele cu cari se compară de obiceiu liniile de undă sunt următoarele:

Cicloida (normală), descrisă de un punct al unei circumferințe ce se rostogolește (*cerc rostogolitor*) pe o dreaptă, care formează *calea de rostogolire*; cicloida are ca ecuații parametrice:

$$x = R\,(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = R\,(1 - \cos\varphi).$$

Cicloida lungită și cicloida scurtată, numită și *trohoidă*, r_1 și r_2 fiind depărtările, diferite de R, ale punctului ce descrie curba, până la centrul cercului de rostogolire; ea are ca ecuații:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\varphi - r_1 \cos\varphi \\ y &= R - r_1 \cos\varphi \end{aligned}\right\}$$ cicloida lungită, $$\left.\begin{aligned} x &= R\varphi - r_2 \sin\varphi \\ y &= R - r_2 \cos\varphi \end{aligned}\right\}$$ trohoida.

Cercul cu raza r_1 sau r_2, care conține punctul descriitor, se numește *cerc descriitor*.

In toate aceste formule φ este unghiul cu care s'a învârtit dela o anumită poziție cercul, sau, mai precis, raza punctului de contact inițial al cercului, luat ca punct descriitor al cicloidei normale. In figura 99 s'a trasat o cicloidă normală B, una lungită A și alta scurtată (trohoidă) C.

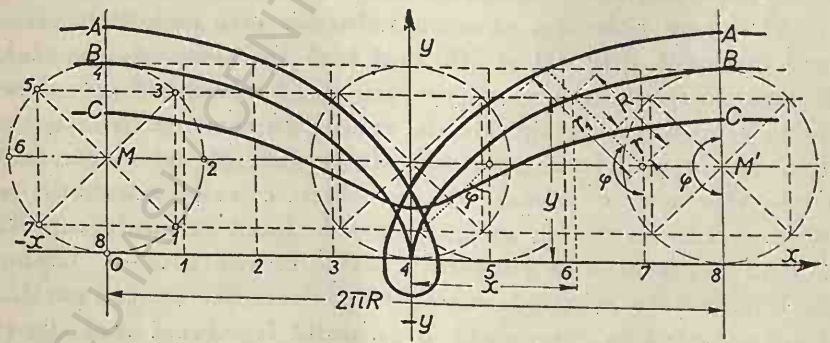


Fig. 99

Pentru trohoidă, luând coordonatele din fig. 100, ceeace revine la înlocuirea lui φ de adinioară prin $\varphi + \pi$, punctul descriitor formând la origină (pentru $\varphi = 0$) vârful C al curbei, vom avea următoarea formă a ecuațiilor parametrice:

$$x = R\,(\varphi + \pi) + r \sin\varphi, \qquad y = R + r\cos\varphi.$$

Construcția punctelor α, β, γ se face, trăgând din punctele de diviziune *1, 2, 3* ale bazei Bx (paralelă cu calea de rostolire), drepte paralele la razele vectoare corespunzătoare unghiurilor φ, duse prin B ca pol. Intradevăr, acestea reprezintă coardele duse din punctele de contact *1, 2, 3*, etc (ale cercului descriitor cu baza sa Bx), la punctul descriitor de pe cerc. Circumferința $2\pi r$ a acestui cerc, fiind mai mică ca $2\pi R$ a cercului rostogolitor, cercul, la contactul său cu baza Bx, pe lângă că se rostogolește și alunecă.

Curbele trasate în felul arătat reprezintă de fapt unde răsturnate, și pentru a se obține forma exactă, comparabilă cu a undelor, ele trebuesc să fie inversate, ca și când rostogolirea grafică menționată s'ar face pe o cale orizontală superioară.

c) *Hula* de mare constă din o succesiune de valuri cilindrice cu creste și văi cari, ca formă, se propagă pe suprafața apei cu o vitesă uniformă, funcțiune de *lungimea de undă*, adică de depărtarea dintre două creste sau două văi consecutive. Perioada T_h a hulei este timpul necesar pentru ca o creastă să se deplaseze pe lungimea de undă și totodată este timpul în care o moleculă parcurge traectoria ei circulară *).

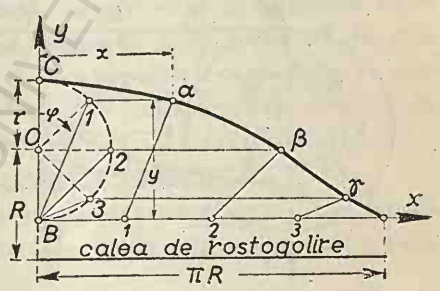


Fig. 100

Forma fundamentală a hulei este *cicloida*. La o undă având exact această formă, fiecare moleculă de pe suprafață s'ar mișca pe o circumferință fixă, al cărei perimetru este egal cu lungimea undei. Dacă circumferințele descrise de molecule ar fi mai mari, valurile s'ar sparge, deoarece suprafața apei ar lua forma unei cicloide lungite, la care linia de undă s'ar bucla la fiecare creastă, ceeace implică alterarea suprafeței (Fig. 99 răsturnată). Cum această suprafață nu prezintă în general nici muchii ascuțite ca la o cicloidă pură, hula ia de obiceiu forma cicloidei scurtate, adică a trohoidei (fig. 93), la care circumferințele pe cari se mișcă particulele au un perimetru mai scurt decât lungimea de undă.

Așa dar, cicloida descrisă grafic de un punct al circumferinței, al cărei perimetru este egal cu lungimea de undă, reprezintă limita maximă a liniei de undă, iar diametrul acestei circumferințe reprezintă înălțimea maximă pe care o poate atinge un val fără a se sparge. Cercul rostogolitor, care este o ficțiune cinematică, aparține tutu-

*) O moleculă de pe suprafață descrie pe loc o circomferință egală cu cercul descriitor, care, la deplasarea lui pe o lungime de undă, dă grafic, printr'un anumit punct al său, curba suprafeței.

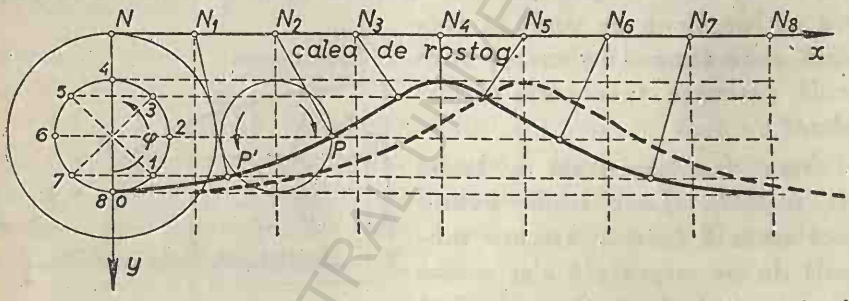
ror undelor de aceeași lunngime, iar forma de trohoidă a unei unde de o anumită înălțime se descrie de către un punct luat pe o circumferință, concentrică cu cercul rostogolitor și având ca diametru înălțimea de undă dată (Fig. 101).

Din punct de vedere grafic, ca să descriem curba undei d. e. dela stânga spre dreapta, cercul cu punctul descriitor trebue să se învârtească în sensul trigonometric și viceversa (Fig. 101).

Cum fiecare particulă de pe suprafață oscilează pe o altă orbită circulară, luând o altă poziție față de particulele vecine, se dă impresia că forma de undă ar înainta.

Dacă în realitate particula P din figură descrie orbita sa fixă în sensul acelor ceasorniculuí, sau particula P' în sensul trigonometric, vom conchide că înaintarea aparentă a undei se face dela stânga la dreapta și viceversa spre curba punctată.

Cu alte cuvinte sensul înaintării undei este legat de sensul în care particulele își descriu orbitele, fixe în spațiu.



Față de fig. 99 avem aci, invers, calea de rostogolire sus, axa y în jos; rostogolirea deși se face tot de la stânga la dreapta, rezultă inversată ca sens, deci și semnul creșterii lui φ. Sensul descrierei orbitei, dacă aceasta aparține particulei P este acela al acelor unui ceasornic, iar dacă orbita aparține particulei P' este cel trigonometric, în cazul când sensul deplasării aparente a undei este, ca în figură, de la stânga la dreapta (și vice versa).

Fig. 101

Vitesa și perioada hulei. La prima vedere vitesa aparentă V, cu care se propagă unda, ar depinde separat de perioada sau durata T_h a ciclului descris de diferitele molecule și de lungimea L a undei, fiindcă în timpul unui ciclu o creastă sau o vale parcurge o lungime de undă, unde $V = \frac{L}{T_h}$, cu alte cuvinte ar părea că L și T_h sunt independente.

De fapt, cum se va vedea mai jos, există o legătură între T_h și L, datorită condițiilor mecanice ale fenomenului. Așa dar, atât *perioada* cât și *vitesa* hulei depind în realitate numai de lungimea undei, fiind în schimb independente de înălțimea acesteia h Cum $L = 2\pi R$, lungimea de undă L poate fi oricând înlocuită, ca

parametru prim R, astfel că vitesa de propagare se va putea exprima și în funcție de R:

$$V = \frac{L}{T_h} = \frac{2\pi R}{T_h}.$$

Înălțimea undei fiind obișnuit mai mică: $h = 2r$, pentru vitesa periferică a moleculelor de apă pe suprafața undei, adică pe orbita lor circulară, vom avea:

$$v = \frac{2\pi r}{T_h}, \qquad \text{rezultând raportul} \quad \frac{V}{v} = \frac{R}{r} = \frac{L}{\pi h}.$$

Vitesa unghiulară corespunzătoare vitesei periferice v a moleculelor este:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{V}{R} = \frac{2\pi}{T_h}.$$

Se demonstrează, cu ajutorul ecuației trohoidei, că normala în orice punct P al liniei de undă, unde vom presupune că se găsește punctul descriitor, trece totdeauna prin punctul de contact N corespunzător al cercului de rostogolire, care este și centrul instantaneu de rotație, astfel că PN completează triunghiul format de raza r a cercului descriitor (sau a cercului orbitei) și raza de contact R a cercului rostogolitor (Fig. 102).

Presupunând acum că mișcarea moleculelor este uniformă, trebue să existe echilibru între forțele ce le acționează pe suprafață și deci rezultanta greutății și forței centrifuge trebue să fie după direcția normalei PN.

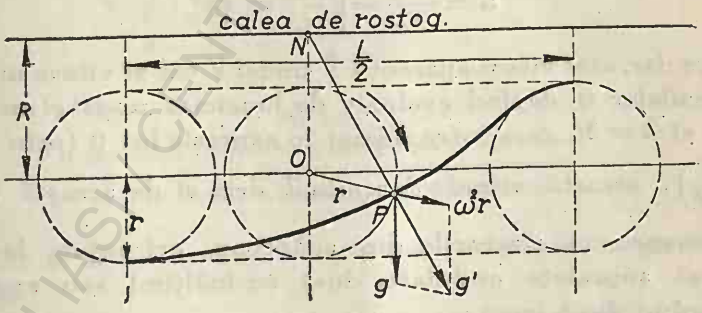


Fig. 102

Vom avea:

$$\frac{R}{r} = \frac{g}{\omega^2 r} \qquad \text{sau} \quad R = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g T_h^2}{4\pi^2}, \qquad (1)$$

rezultând, după cum am anunțat, că lungimea de undă este funcție de perioadă: $L = 2\pi R = \frac{gT_h^2}{2\pi}$ sau, invers, perioada este funcție de lungimea de undă sau de R:

$$T_h = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}, \qquad (1')$$

și anume egală cu *durata de oscilație a unui pendul simplu de lungime* R.

Vitesa undei va fi prin urmare funcțiune numai de una din cele două cantități L (sau R) și T_h:

$$V = \frac{L}{T_h} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} = \sqrt{gR} = \frac{gT_h}{2\pi}. \qquad (2)$$

Mai putem scrie:

$$L = \frac{2\pi}{g}V^2.$$

In fine, vitesa periferică v a moleculelor, al cărei raport către V este cunoscut, va fi:

$$v = \frac{r}{R}\sqrt{gR}, \qquad (3)$$

iar vitesa unghiulară după (1)

$$\omega = \frac{2\pi}{T_h} = \sqrt{\frac{2\pi g}{L}} = \frac{g}{V}. \qquad (1'')$$

Așa dar, atât vitesa aparentă a undei V cât și vitesa unghiulară a moleculelor ω, depind exclusiv de lungimea undei și nu de înălțimea ei $h = 2r$, care intră numai în expresia lui v (prin raportul $\frac{v}{V} = \frac{r}{R}$), această vitesă depinzând deci și de această înălțime. De asemenea și straturile din adâncime, orizontale la origină, formează suprafețe ondulate, însă cu înălțimi sau amplitudini descrescând după legea:

$$r = r_0 C^{-\frac{2\pi z}{L}} = r_0 C^{-\frac{z}{R}},$$

unde r_0 este raza cercului descris de moleculele de suprafață, iar z este adâncimea stratului sub suprafață. La fiecare creștere a adâncimei cu $\frac{1}{9}L$ amplitudinea descrește la jumătatea valorii ei precedente.

d) *Ruliul vaselor în timp de hulă.*

1°. *Impulsia valurilor și unghiul de inclinare al ruliului.*

Pe mare, vasul este supus atât legilor de mișcare în apă liniștită, în legătură cu condițiunile lui de stabilitate, cât și legilor ce domină masa de apă în mișcare ondulatoare.

Pentru orice corp în oscilație de rotație, accelerația unghiulară este, după cum s'a demonstrat, raportul dintre suma momen-

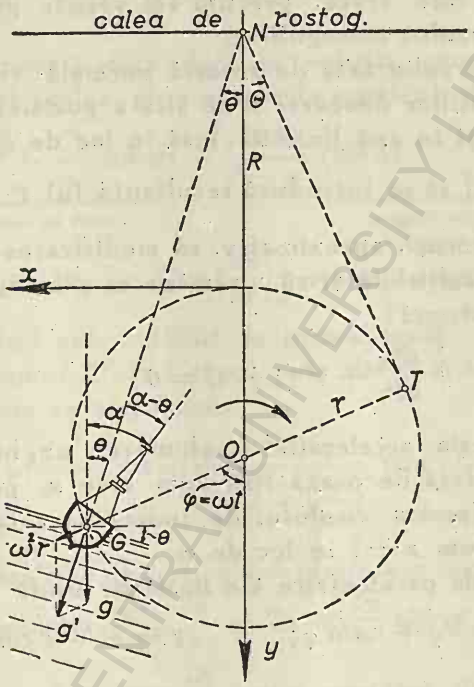


Fig. 103

După semnul creșterei lui φ rostogolirea pe calea superioară are loc de la dreapta spre stânga pentru descrierea trohoidei. Avem de fapt fig. 99 răsturnată.

telor statice și suma momentelor de inerție polare în jurul axei de oscilație.

In *apă liniștită* am avut ecuația oscilațiilor plutitorului:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2\alpha = 0 \qquad \text{cu} \qquad \nu^2 = \frac{gl}{k^2},$$

care, integrată, dă unghiul de ruliu:

$$\alpha = \alpha_0 \cos \nu t + \frac{C}{\nu} \sin \nu t,$$

unde α_0 este inclinația și C vitesa unghiulară la $t = 0$.

Dacă începem timpul, atunci când $\alpha_0 = 0$, şi numim α_m amplitudinea lui α, putem scrie: $\alpha = \alpha_m \sin \nu t$, ecuaţie valabilă numai pentru micile oscilaţiuni.

Dacă vasul se află pe o undă de hulă (Fig. 103), al cărei plan tangent este inclinat cu unghiul θ faţă de orizont, el se va găsi în echilibru în câmpul gravitaţiei, modificat prin prezenţa forţei centrifuge, verticala fiind înlocuită prin direcţia GN a normalei la undă, care trece, precum am văzut, prin punctul de contact N al cercului rostogolitor.

Unghiul de ruliu faţă de această normală este $\alpha - \theta$, astfel că ecuaţia oscilaţiilor deoparte şi de alta a poziţiei de echilibru se poate scrie ca şi în apă liniştită, însă in loc de g în expresia lui $\nu^2 = \frac{gl}{k}$ ar trebui să se introducă rezultanta lui $\overline{g}$ şi a lui $\overline{\omega^2 r}$.

Admitem totuşi, aproximativ, că modificarea valorii scalare a câmpului este neglijabilă şi că ν rămâne ca şi în apă calmă. Ecuaţia se va scrie atunci:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2 (\alpha - \theta) = 0, \qquad (I)$$

fiindcă în expresia acceleraţiei unghiulare, unghiul de inclinaţie trebue măsurat faţă de o axă fixă cum este α, pe când unghiul care intră în expresia cuplului de îndreptare, faţă de verticala relativă, este acum $\alpha - \theta$ în loc de α.

Din ecuaţiile parametrice ale liniei de undă

$$x = R\varphi + r \sin \varphi; \qquad y = R + r \cos \varphi$$

tragem:

$$\frac{dx}{dy} = tg\,\theta = \frac{r \sin \varphi}{R + r \cos \varphi} = \frac{\frac{r}{R} \sin \varphi}{1 + \frac{r}{R} \cos \varphi}.$$

Unghiul θ îşi atinge valoarea maximă Θ pentru punctul trohoidei, pentru care direcţia normalei GN sau a câmpului rezultant atinge cercul r. In acest caz avem $\sin \Theta = \frac{r}{R}$ şi cum Θ este în general mic, putem înlocui sinusul şi tangenta prin arc, neglijând şi pe $\frac{r}{R} \cos \Theta$ (datorită micimei lui $\frac{r}{R}$) faţă de 1. Dacă mai punem $\varphi = \omega t$, relaţia de mai sus ia forma:

$$\eta = \Theta \sin \omega t, \qquad \text{(II)}$$

perioada fiind

$$T_h = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ecuația oscilațiilor devine atunci:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2\alpha = \Theta\nu^2 \sin \omega t \; ^*) \qquad \text{(III)}$$

și soluția ei generală este dată de soluția generală a ecuației fără membrul al doilea, plus o soluție particulară a ecuației (III):

$$\alpha = \underbrace{(\alpha_0 \cos \nu t + \frac{C}{\nu} \sin \nu t)}_{\text{unghiul de ruliu}} + \frac{\Theta\nu^2}{\nu^2 - \omega^2} \underbrace{(\sin \omega t - \frac{\omega}{\nu} \sin \nu t)}_{\text{unghiul undei}}, \qquad \text{(IV)}$$

unde α_0 est inclinația iar $C = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ vitesa unghiulară a vasului în momentul când este întâlnit de prima undă. Dacă aceasta se întâmplă în momentul când vasul este drept și în repaos ($\alpha_0 = 0$ și $C = 0$), ecuația se simplifică:

$$\alpha = \frac{\Theta\nu^2}{\nu^2 - \omega^2} (\sin \omega t - \frac{\omega}{\nu} \sin \nu t) = \Theta \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2} (\sin \omega t - \frac{\omega}{\nu} \sin \nu t). \qquad \text{(IV')}$$

Inclinația totală față de verticală depinde, așa dar, atât de valoarea absolută a perioadelor $T = \frac{2\pi}{\nu}$ și $T_h = \frac{2\pi}{\omega}$ cât și de raportul lor $\frac{\omega}{\nu} = \frac{T}{T_h}$, precum și de $\Theta = \frac{\pi h}{L}$, adică raportul dintre înălțime și lungimea undei.

2°. *Diferite consecințe rezultând din raportul dintre perioada ruliului vasului și perioada hulei.* Putem considera următoarele cazuri:

a) $\frac{T}{T_h}$ foarte mic sau $\frac{\nu}{\omega}$ foarte mare, deci un vas de foarte

*) Aceasta este ecuația unui pendul dublu, la care un pendul mic cu perioada $T = \frac{2\pi}{\nu}$ este suspendat la capătul unui pendul mai mare cu perioada $T_h = \frac{2\pi}{\omega}$. Unghiul α arată inclinația pendulului mic față de verticală în funcție de timp (*Pollard et Dudebout*).

mare stabilitate şi de moment de inerţie polar mic, care se găseşte pe undă lungă.

Dacă luăm cazul limită $\frac{T}{T_h} = \frac{\omega}{\nu} = 0$, ecuaţia (IV') devine $\alpha = \Theta \sin \omega t = \theta$, adică inclinaţia vasului este egală cu a undei.

b) $\frac{T}{T_h}$ este foarte mare, sau $\frac{\nu}{\omega}$ foarte mic, adică un vas de o foarte mică stabilitate şi un mare moment de inerţie, care se găseşte pe unde scurte.

Cum după (I)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2\alpha - \nu^2\theta = 0 ,$$

iar după (II)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\Theta\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2\theta , \qquad \text{deci} \quad \theta = -\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

şi prin urmare:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2\alpha + \frac{\nu^2}{\omega^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 ,$$

care, în ipoteza $\frac{\nu}{\omega} = 0$, se reduce la: $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2\alpha = 0$, adică la ecuaţia oscilaţiilor în apă liniştită, rezultă că mişcarea valurilor nu are în acest caz nici o influenţă asupra mişcării vasului.

Cum o mică stabilitate presupune o poziţie înaltă a centrului de greutate, iar un moment de inerţie polar mare, o mare depărtare a greutăţilor importante de baricentrul G, condiţii ce nu se pot întruni la vasele mici, conchidem că vasele mici se găsesc în primul caz *a)* considerat, adică acel al unei mari stabilităţi şi unui moment de inerţie polar mic, având deci ruliul mai pronunţat pe mare; chiar la o hulă mai redusă ele sunt sensibil influenţate de valuri.

c) $\frac{T}{T_h}$ este arbitrar, dar diferit de *1*.

Dacă *1)*: vasul este întâlnit de primul val în poziţia normală ($\alpha_0 = 0$), soluţia (IV) se poate scrie astfel:

$$\alpha = \frac{1}{\nu}\left(C - \frac{\Theta\nu^2\omega}{\nu^2 - \omega^2}\right)\sin \nu t + \frac{\Theta\nu^2}{\nu^2 - \omega^2}\sin \omega t .$$

Dacă totodată *2)*: vasul se găseşte pe o creastă sau în fundul unei depresiuni, în care poziţie

$$\varphi = \omega t = n\pi ,$$

vom avea pentru această poziție, presupusă normală (adică cu vasul drept)

$$\alpha = \frac{1}{\nu}\left[C - \frac{\Theta \nu^2 \omega}{\nu^2 - \omega^2}\right] \sin \nu t = 0,$$

deci vitesa unghiulară în poziția dreaptă va fi

$$C = \frac{\Theta \nu^2 \omega}{\nu^2 - \omega^2}.$$

Introducând această valoare particulară a lui C în ecuația generală din cazul 1), obținem forma aplicabilă cazului mai particular 2):

$$\alpha = \frac{\Theta \nu^2}{\nu^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{\nu^2}{\nu^2 - \omega^2} \theta = \frac{1}{1 - \left[\frac{T}{T_h}\right]^2} \theta. \qquad \text{(V)}$$

Dacă

$$\frac{T}{T_h} = \sqrt{2},$$

avem

$$\alpha = -\theta,$$

adică inclinația vasului este egală cu a normalei valului, însă de partea cealaltă a verticalei.

Dacă

$$\frac{T}{T_h} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

avem

$$\alpha = +2\theta,$$

adică inclinația este dublul inclinațiunei normalei și de aceeași parte a veticalei.

Valoarea maximă a inclinațiunei se obține punând: $\theta = \Theta$:

$$\alpha_{max} = \Theta \frac{\nu^2}{\nu^2 - \omega^2} = \Theta \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{T_h}\right)^2} = \Theta \frac{T_h^2}{T_h^2 - T^2}.$$

De aci rezultă următoarele:

Dacă $\frac{T}{T_h} > 1$, α este negativ, adică vasul se inclină în partea opusă valului.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă $\frac{T}{T_h} < 1$, α este pozitiv, adică vasul se înclină cu catargurile lui în acelaşi sens cu valul.

d) $\frac{T}{T_h} = \pm 1$, adică egalitate între perioada proprie a vasului şi perioada hulei. Soluţia particulară din (IV), ce dă unghiul undei, capătă atunci forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Pentru a determina creşterea inclinaţiei în acest caz, să plecăm dela forma generală a ecuaţiei diferenţiale (III), în care să punem acum $\omega = \nu$:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu^2\alpha = \nu^2\Theta \sin \nu t,$$

obţinând prin integrare:

$$\alpha = \left(\alpha_0 - \frac{\Theta \nu t}{2}\right) \cos \nu t + \left(\frac{C}{\nu} + \frac{\Theta}{2}\right) \sin \nu t. \qquad (IV')$$

In cazul când vasul, la întâlnirea primului val, se găseşte în poziţie normală ($\alpha = 0$ şi $C = 0$), ecuaţia se simplifică în:

$$\alpha = \frac{\Theta}{2} (\sin \nu t - \nu t \cos \nu t).$$

Dacă

$$\nu t = (2n + 1)\frac{\pi}{2},$$

avem;

$$\sin \nu t = \pm 1$$
$$\cos \nu t = 0,$$

şi deci

$$\alpha = \pm \frac{\Theta}{2},$$

adică, dacă vasul pluteşte în locul cel mai înclinat al valului, propria lui înclinaţie este egală cu jumătate din aceea a valului.

Dacă

$$\nu t = n\pi,$$

avem

$$\alpha = \pm n \frac{\pi\Theta}{2}$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(+ când n este impar, adică la creastă, și — când este par, adică la fund, fiindcă pentru $n = 0$ deci par, pentru care $\alpha = 0$, presupunem că vasul se găsește la fund), ceeace arată că inclinația vasului este maximă pe creastă sau în fundul valului (deci în cuadratură de fază cu valul), crescând la fiecare trecere dintr'o asemenea poziție la cea următoare cu:

$$\frac{\pi\Theta}{2} = \frac{\pi^2 h}{L}$$

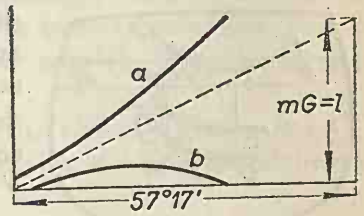
sau

$$1{,}57\,\Theta = 9{,}87\,\frac{h}{L}\,.$$

De exemplu pentru $\frac{h}{L} = 0{,}025$, creșterea lui α la fiecare semioscilație (π) va fi $\Delta\alpha = 0{,}25$ sau aproximativ 14^0, ceeace va cauza răsturnarea după câteva semioscilații.

Totuși, o potrivire primejdioasă a celor două perioade (*rezonanță*) poate interveni numai dacă vasul oscilează isocron la elongațiuni mici și mari.

Pentruca un sistem pendular să oscileze isocron la diversele elongațiuni, trebue ca accelerațiile și deci forțele ce acționează să fie proporționale cu inclinațiile. Pentru vase, ar trebui deci ca brațele de cuplu ale stabilității statice să varieze liniar, dacă facem abstacție de rezistența apei, care dă și ea un moment. Ori, pentru învingerea acestei rezistențe sunt necesare forțe suplimentare, cari cresc mai repede decât unghiul de inclinație, și de aci rezultă pentru curba brațelor de stabilitate statică ce ar corespunde isocronismului (dreapta punctată) o formă ca a curbei *a* din fig. 104. Rezultă că obișnuitele curbe cu concavitatea în jos, ca cea însemnată cu *b*, dau perioade diferite la mici și la mari inclinațiuni, astfel că, chiar dacă ar interveni cumva rezonanță, inclinările crescând, rezonanța va înceta. In afară de aceasta, stabilirea unei egalități între perioade, adică rezonanța, este stingherită și prin neregularitatea valurilor; în fine, pericolul se mai poate combate și prin orientarea oblică a vasului, astfel ca să nu mai stea paralel cu direcția valurilor.



$mG = l$ = înălțimea metacentrului

Fig. 104

Din cele ce preced rezultă că, în orice caz, rezonanţa trebue evitată şi, deaceia, este bine a se face

$$T > T_h$$

pe cât posibil (*Rankine* recomandă $T > \sqrt{2}\, T_h$), în care scop se micşorează l, care la unele cuirasate se face numai de $60\,cm$.

In schimb se alege o formă de carenă astfel, ca pentru inclinaţiuni α mai mari, distanţa GN (vezi fig. 103) să crească repede.

In cazul când amortizarea, datorită frecărei şi în general rezistenţei apei, este slabă, putându-se aplica ecuaţiile de mai sus, soluţia generală a ecuaţiei oscilaţiilor arată că există „bătăi", amplitudinea variind între 0 şi un α_{max}.

In apă liniştită este totdeauna avantajos a mări pe T şi în acest scop se măreşte k pentru a nu se micşora stabilitatea (l). La construcţiile moderne se măreşte lărgimea vasului, iar greutăţile mari sunt aşezate departe de axa de rotaţie longitudinală; se obţine astfel $T = 20''$ cu l de ordinul $1\,m$. Micşorarea lui l, deşi mai comodă, este legată de pericole, mai ales dacă se întrebuinţează pânze.

12. Teorema lui Leclert.

Pe planul figurei, luat ca plan de inclinaţiune, determinat de orientările a două planuri de plutire vecine P şi P' (ultimul neînsemnat pe figură), cari despart aceiaşi carenă V, să considerăm urma cilindrului normal de contur aparent al suprafeţei (C), corespunzătoare acelei carene, precum şi urma cilindrului de contur aparent al suprafeţei (C_1), corespunzătoare unei carene sporite $V + \Delta V$, dată de planurile P_1 şi P_1', respectiv paralele cu P şi P'. Fie C şi C_1 centrele de carenă, corespunzătoare planurilor de plutire paralele P şi P_1, cari despart din corp carenele: V şi $V + \Delta V$. Vom presupune că planul figurei a fost dus chiar prin C; el nu va conţine în general şi pe C_1. Planurile tangente la suprafeţele (C) şi (C_1) în C şi C_1 sunt paralele cu planurile de plutire P şi P_1 şi deci între ele (toate, normale pe planul figurei), iar C_1 se va proecta în c_1 pe urma cilindrului de contur aparent al suprafeţei (C_1).

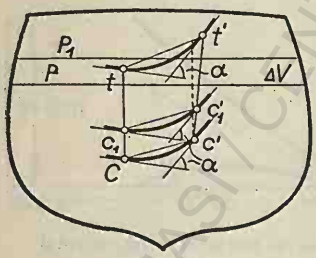


Fig. 105

Să luăm centrele C' şi C'_1, în general neconţinute în planul

figurei, corespunzătoare planurilor paralele P' și P'_1 (neînsemnate pe figură), inclinate cu $\sphericalangle \alpha$ față de P și P_1 și perpendiculare, ca și acestea pe planul figurei, ales ca plan de înclinație.

Pe dreptele CC_1 și $C'C'_1$ se vor găsi respectiv centrele T și T' ale celor două volume elementare ΔV, despărțite pe corp de fiecare din cele două perechi de planuri de plutire paralele.

Vom avea evident relațiile:

$$TC = C_1C \frac{V + \Delta V}{\Delta V}$$

$$T'C' = C_1'C' \frac{V + \Delta V}{\Delta V},$$

ceeace arată că suprafața (T), locul geometric al lui T, se deduce din (C) și (C_1) luând pe dreapta CC_1, care leagă punctele corespunzătoare C și C_1, o lungime CT proporțională cu CC_1. Planurile tangente în C și C_1 respectiv la suprafețele (C) și (C_1) fiind paralele cu planurile P și P_1, planul tangent la (T) în punctul T va fi deasemenea paralel cu ele.

Punctul T se va proecta, așa dar, în t pe urma cilindrului de contur aparent al suprafeței (T), normal pe planul de inclinație, iar tangentele corespunzătoare la urmele cilindrilor de contur aparent ale celor trei suprafețe (C), (C_1) și (T) vor fi paralele.

Tot astfel C', fiind centrul de carenă relativ la planul înclinat P', punctele C', C'_1 și T' se vor proecta respectiv pe cele trei urme depe figură ale menționaților cilindri de contur aparent și anume în c', c_1' și t'; tangentele la aceste urme în numitele puncte vor fi paralele cu urmele planurilor paralele P', P_1' și deci între ele.

Rezultă că unghiurile de contingență ale celor trei curbe Cc', c_1c_1' și tt' sunt egale, astfel că din relația dată de paralelismul coardelor:

$$tt' - Cc' = (c_1c_1' - Cc') \frac{V + \Delta V}{\Delta V}$$

putem trage, prin împărțirea cu valoarea comună α a unghiului de contingență:

$$r - \rho = d\rho \frac{V}{dV},$$

unde ρ și r sunt razele de curbură (în punctele corespunzătoare) ale urmelor cilindrilor de contur ai suprafețelor (C) și (T). Ori-

suprafața (T), având ca plan tangent la limită (când $P_1 \to P$, $P_1' \to P'$ și $P' \to P$) chiar planul P în punctul T, care punct tinde evident spre baricentrul ariei de plutire P, nu este altceva decât suprafața de plutire (P), corespunzătoare carenei V. Rezultă următoarea relație între razele r și ρ ale urmelor cilindrilor de contur aparent ale suprafețelor fundamentale (P) și (C), relative unei carene V:

$$r = \rho + V\frac{d\rho}{dV} = \frac{I}{V} + V\frac{d\left(\frac{I}{V}\right)}{dV} = \frac{dI}{dV}.$$

Aceasta constitue *teorema lui Leclert.*

13. Influențarea stabilității prin variația greutății.

Să luăm cazul simplu, când adausul de greutate g_0 se așează pe verticala centrului de greutate al plutitorului sau, ceeace revine la același lucru, g_0 este simetric repartizat în jurul acestei verticale. Carena V va crește cu carena suplimentară ΔV, noul G rămânând pe aceeași verticală față de corp.

Dacă adausul acesta este mic, tranșa isocarenă ΔV va fi subțire, iar pentru diferitele inclinațiuni ale plutitorului locul centrelor carenei (sau subpresiunei) suplimentare va fi suprafața înfășurată (P) a planurilor de plutire.

Pentru un plan de inclinație dat, *curba metacentrică* a acestor carene elementare, numită și *curba metacentrelor diferențiale, va fi desfășurata urmei cilindrului normal de contur aparent al suprafeței de plutire* (P), urmă a cărei rază de curbură este dată de teorema lui *Leclert*. Și, într-adevăr, în modul în care curba metacentrică a carenei V se obține din suprafața (C), în același mod din suprafața (P) se va construi curba metacentrelor diferențiale.

Baricentrul g al greutății adause g_0 se va putea găsi dedesubtul sau deasupra metacentrului carenei suplimentare, adică a centrului diferențial; cuplul suplimentar dat de g_0 și de subpresiunea corespunzătoare

$$-\varpi\, dV = -g_0$$

ce va trece prin metacentrul diferențial, va fi, în consecință, de *îndreptare* sau de *răsturnare*, respectiv.

Pentru a exprima acest criteriu, să numim a_1 înălțimea lui g deasupra planului de plutire (care conține la limită centrul lui ΔV).

Pentru o inclinaţiune α mică (atunci când intră în consideraţie stabilitatea iniţială) vom avea cuplul suplimentar

$$-g_0 (r - a_1) \alpha,$$

căci

$$r = \frac{dI}{dV}$$

este înălţimea metacentrului diferenţial deasupra planului de plutire.

Dacă pereţii sunt verticali, vom avea:

$$r = \frac{dI}{dV} = 0,$$

şi atât (P) cât şi curba metacentrică diferenţială, care este desfăşurata curbei de contur aparent al lui (P), se reduc la un punct pe planul de plutire, astfel că stabilitatea va descreşte (cuplul suplimentar pozitiv) sau va creşte (cuplul suplimentar negativ), după cum g se va găsi sub sau deasupra planului de plutire.

De exemplu, pentru bărcile cu pereţii drepţi şi deci cu metacentrul diferenţial chiar în planul de plutire, la îmbarcarea oamenilor, cari aşezaţi pe bănci îşi au centrul de greutate deasupra planului de plutire, stabilitatea va descreşte. Contrariul se întâmplă la bărcile cu profilul transversal evazat $\left(\frac{dI}{dV} > 0\right)$, pentru cari metacentrul diferenţial se găseşte cu mult deasupra planului de plutire.

14. Formula lui Dupin.

Să desvoltăm expresia razei de curbură r a urmei cilindrului de contur aparent al lui (P):

$$r = \frac{dI}{dV}.$$

Fie Ω aria de plutire a planului P şi $\Omega + d\Omega$ aceea a planului paralel P_1, aşezat cu dz mai sus, perimetrele lor fiind respectiv abc şi $\alpha\beta\gamma$. Aceste arii diferă între ele cu fâşia cuprinsă între $\alpha\beta\gamma$ şi $a'b'c'$, proecţia lui abc pe planul P_1. Fie ds arcul infinitesimal $\alpha\beta$ şi i unghiul de inclinare respectiv al suprafeţei exterioare a plutitorului faţă de verticală, astfel că $tg\, i.dz$ este

lărgimea respectivă a fâşiei. Elementul de suprafaţă al acesteia $dz\,tg\,i\,ds$ are ca moment de inerţie în raport cu axa de înclinaţie η:

$$\xi^2\,dz\,tg\,i\,ds.$$

Momentul total de inerţie al fâşiei va fi:

$$dI = dz\int tg\,i\,\xi^2\,ds$$

şi cum

$$dV = \Omega\,dz,$$

obţinem *formula lui Dupin*:

$$r = \frac{dI}{dV} = \frac{1}{\Omega}\int tg\,i\,\xi^2\,ds.$$

Se poate imagina că la fiecare punct al conturului ariei de plutire este aplicată o sarcină repartizată, care, pe unitatea de lungime, să fie proporţională cu înclinarea i. Axele principale de inerţie ale conturului, astfel încărcat, determină curburile secţiunilor normale principale ale ariei de plutire (P), în punctul ei de contact O cu planul de plutire.

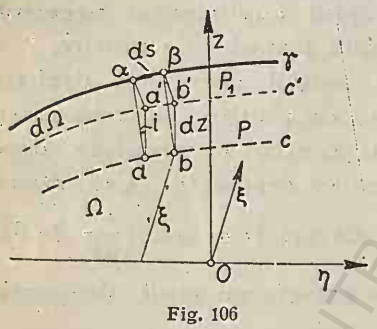


Fig. 106

Intradevăr razele principale de curbură r, în O, ale acestei suprafeţe sunt egale cu momentele principale de inerţie ale conturului încărcat, împărţite cu Ω. Aceasta arată inconvenientul pereţilor întrânzi, adică cu i negativ, cari micşorează pe r, coborând metacentrul diferenţial.

Este de notat că, pe când ρ depinde numai de aria de plutire actuală, r depinde atât de această arie cât şi de aceea vecină, paralelă cu ea (sau de înclinarea pereţilor faţă de aria de plutire actuală).

Aplicaţie. Ca aplicaţie a formulei lui *Dupin* vom arăta o altă utilizare a metacentrului diferenţial, în legătură cu centrele de curbură ale pereţilor.

Fie o carenă cilindrică (Fig. 107), limitată lateral de secţiuni drepte, pereţii formând cu verticala, la marginele B_1 şi B_2 ale planului normal de plutire, unghiurile i_1 şi i_2. Fie $2L$ lărgimea

ei. Fie η proecția axei de înclinație în mijlocul lui $B_1 B_2$. Vom avea:

$$r = \frac{1}{2Ll} L^2 l (tg\, i_1 + tg\, i_2) = \frac{L}{2} (tg\, i_1 + tg\, i_2).$$

Ducând în B_1 și B_2 normalalele pe urmele pereților, vom tăia în A_1 și A_2 verticala ce trece prin punctul de contact al planului de plutire cu suprafața înfășurată (P) a acestuia.

Metacentrul diferențial (centrul de curbură al curbei $\eta\eta'$, înfășurata liniilor de plutire) va fi după formula de mai sus în mijlocul lui A_1 și A_2.

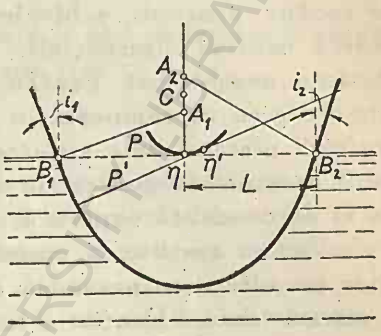


Fig. 107

In caz de simetrie punctele A_1, C, A_2 coincid.

Să presupunem acum (Fig. 108) pereții simetrici și să luăm diverși plutitori cilindrici, având aceeași arie de plutire normală Ω în planul P și aceeași înclinare în punctele B, deci, după cum s'a arătat mai sus, același metacentru diferențial C.

Ne vom servi de acest punct, centrul de curbură al curbei cc' din

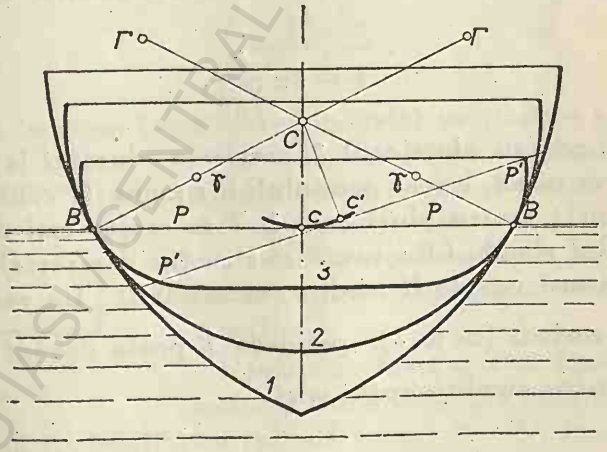


Fig. 108

c, pentru a înclina în jurul lui vasul (prin rostogolirea cilindrului de contur aparent al lui (P) pe planul de plutire) și a examina variația lui Ω.

Să înlocuim pereții prin cercurile lor osculatoare *1*, *2*, *3*, ale căror centre sunt respectiv γ, C, Γ.

Curba centrelor de carenă în preajma poziței considerate are o rază de curbură:

$$\rho = \frac{I}{V}.$$

Este evident că, trecând, prin înclinare, dela planul de plutire P la planul vecin P' (pozițiunile sunt acelea cari se obțin prin rostogolirea suprafeței (P) sau mai exact a cilindrului său de contur aparent, echivalentă cu o rotire în jurul axei C, care poartă centrul diferențial), I va crește pentru plutitorul *1*, va rămâne neschimbat pentru *2*, iar pentru *3* va descreste, și prin urmare ρ se va comporta în același mod. Rezultă că *curbura metacentrică*, plecând dela *metacentrul principal* (punctul de înapoiere), va fi ascendentă pentru *1*, se va reduce la un punct pentru *2* și va fi descendentă pentru *3*.

Vedem așa dar că, cunoașterea centrelor de curbură ale pereților permite a se prevedea orientarea curbei metacentrice pentru o carenă dată. Pentru a întinde acest studiu și la alte carene, corespunzătoare la diferite încărcări ale plutitorului, vom fi conduși astfel a construi desfășurata curbei pereților, cari evidențiază, pentru diferite nivele, poziția centrului γ (sau Γ) față de metacentrul diferențial respectiv C.

Dacă ne referim la durata oscilațiilor pentru amplitudinile mici:

$$T = 2\pi \frac{k}{\sqrt{gl}},$$

se vede că, pentru plutitorul *2*, creșterea duratei la amplitudini mai mari va urma legea pendulului simplu (I constant și deci și l constant); pentru plutitorul *1*, T va crește mai puțin repede ca la pendulul simplu (din cauză că l mediu descrește), iar pentru *3* va crește mai repede (l mediu descrescând). La vase cu pereți pronunțat curbați (ca la *3*), perioada T poate deveni cu $\frac{1}{3}$ mai mare ca pentru amplitudinile mici.

15. Carene suplimentare.

Să presupunem (Fig. 109) că la carena V se adaugă carena suplimentară v, centrele lor respective fiind C și c. Centrul k al carenei totale este dat de formula:

$$\overline{ck} = \overline{cC}\,\frac{V}{V+v} = \gamma.\overline{cC}\,.$$

Noua suprafață de centre de carenă (k) va fi deci *omotetică* cu prima în raport cu c, raportul de omotetie fiind:

$$\gamma = \frac{V}{V+v}.$$

Să luăm acum un plutitor *simetric* și să-i adăugăm o carenă suplimentară v simetrică și totodată un lest

$$g_0 = \varpi v$$

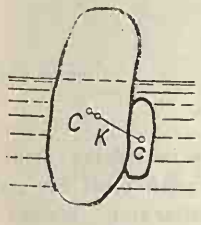


Fig. 109

simetric, al cărui centru de greutate g să coincidă cu centrul carenei suplimentare. Se poate ușor vedea că *stabilitatea inițială* nu s'a schimbat.

Intradevăr, centrul nou de carenă k, noul centru de greutate G și noul metacentru μ se obțin pe aceeași verticală (axa de plutire), prin omotetie în raport cu c, aplicând raportul de omotetie γ. Rezultă că înălțimea metacentrică l va fi și ea înmulțită cu $\gamma < 1$; cum însă carena și deci greutatea totală G_0 a crescut în proporția:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{V+v}{V},$$

cuplul de îndreptare (stabilitatea inițială) va rămâne același.

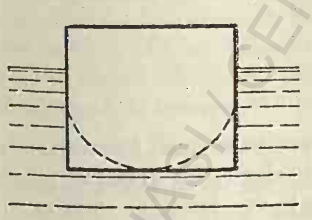


Fig. 110

Aceasta se putea și altfel prevedea, fiindcă lestul adaus și carena suplimentară introduc, din cauza coincidenței centrelor lor, un cuplu cu braț nul, astfel că cuplul stabilității inițiale nu se modifică.

Pentru aceleași motive însă, dacă g al lestului (care este mai dens ca apa) cade mai jos decât c, stabilitatea inițială va crește. Deducem că, la o formă de vas cu carenă rotunjită, dacă se suprimă rotunjirea, făcându-se profilul dreptunghiular, și se adaugă la fund (adică mai jos) un lest echivalent (pentruca planul de plutire să nu se modifice), stabilitatea va crește.

Aplicația Nr. 29. Să se găsească poziția de echilibru a unei bare subțiri $\overline{AB} = l$ de secțiune S și greutate specifică ϖ_1, articulată la capătul A, aflat la adâncimea h sub nivel.

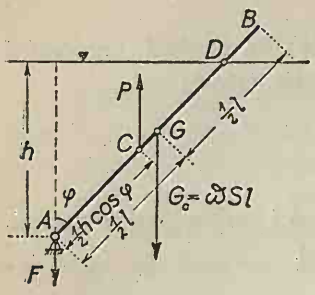


Fig. 111

Soluție. Momentele în jurul lui A în cazul echilibrului dau

$$\varpi_1 S l \frac{l}{2} \sin\varphi = \varpi S \frac{h}{\cos\varphi} \frac{h}{2\cos\varphi} \sin\varphi.$$

De aici rezultă mai întâiu soluția $\varphi = 0$ sau 2π, și apoi

$$\cos\varphi = \frac{h}{l}\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi_1}}$$

în ipoteza că

$$\frac{h}{l}\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi_1}} < 1.$$

Proecția pe verticală dă presiunea pe reazem F.

Aplicația Nr. 30. Un plutitor produce deschiderea sau închiderea automată a unei clape sau a unui ventil, la depășirea unui anumit nivel într'un sens sau altul. Fie G_0 greutatea plutitorului inclusiv aceea a tijei l și a clapei, S secțiunea plutitorului presupus cilindric și Ω suprafața clapei, care reazămă etanș pe marginile ei. A se găsi înălțimea z de apă care va produce automat deschiderea clapei.

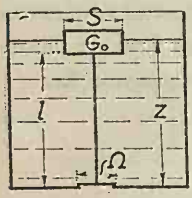


Fig. 112

Răspuns. Vom avea în acel moment următoarea relație de echilibru

$$G_0 + \varpi\Omega z = \varpi S(z - l),$$

de unde

$$z = \frac{G_0 + \varpi Sl}{\varpi(S - \Omega)}.$$

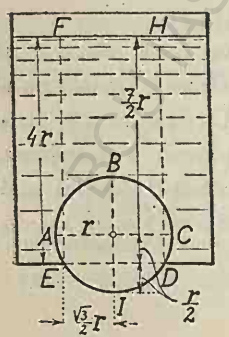


Fig. 113

Aplicația Nr. 31. Să se determine forța necesară pentru ridicarea unui ventil sferic, de greutate proprie G_0, care deschide orificiul de fund al vasului din figură.

Soluție. Ventilul sferic nefiind udat peste tot de apă, întru cât este aplicat etanș deasupra fundului, pentru calculul rezultantei presiunilor asupra ventilului se poate lua subpresiunea sferei *complet* muiate, din care se va scădea greutatea coloanei de apă cu fund sferic *FEIDH*. Aceasta din urmă fiind mai mare de cât greutatea sferei, socotită în apă, va da o rezultantă descendentă.

$$\frac{3}{4}\pi r^2 \cdot 4r + \frac{1}{6}\pi\frac{r}{2}\cdot\frac{5}{2}r^2 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{15}{8}\varpi\pi r^3.$$

Forţa căutată va fi

$$G_0 + \frac{15}{8}\pi\varpi r^3 .$$

Aplicaţia Nr. 32. Două camere de apă identice, de secţiune Ω, conţin cantităţi egale de apă de greutate Q şi reazămă pe două pistoane egale de secţiune ω, supuse unei presiuni de apă comprimată. Greutatea unei camere inclusiv pistonul este G. In cameră plutesc două vase de greutate G_1 şi G_2. Ce distanţă verticală y trebue să existe între feţele inferioare ale pistoanelor, pentru ca să existe echilibru? Care va fi atunci diferenţa de nivel z între planurile de apă din camere?

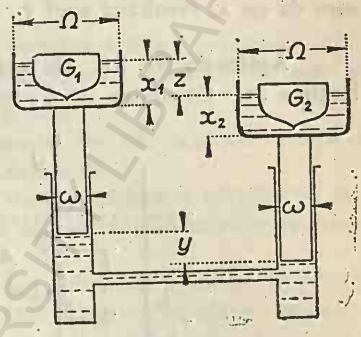


Fig. 114

Soluţie. Pentru echilibru va trebui să avem:

$$\frac{G_1+Q+G'}{\omega} + \varpi y = \frac{G_2+Q+G}{\omega} ,$$

de unde

$$y = \frac{G_2 - G_1}{\varpi\omega} .$$

Dacă x_1 şi x_2 sunt înălţimile de apă în cele două camere, avem:

$$x_1 = \frac{G_1 + Q}{\varpi\Omega} \qquad x_2 = \frac{G_2 + Q}{\varpi\Omega}$$

şi cum denivelarea fundurilor pistoanelor este egală cu aceea a fundurilor vaselor rezultă:

$$y = z + x_2 - x_1 \qquad z = \frac{G_2 - G_1}{\varpi}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Omega}\right).$$

Aplicaţia Nr. 33 O scândură subţire de lungime l şi greutate volumică ϖ_1 este pusă în apă, rezemată pe muchia B, şi rămâne în echilibru cu axa ei într'un plan vertical. Să se calculeze lungimea cufundată x precum şi lungimea y care trece în sus de muchia B, ţinând seama şi de frecarea care se produce în B, (coeficientul de frecare B fiind $f = tg\,\varphi$).

Soluţie. Dacă ω este secţiunea scândurei (presupusă de mică grosime), subpresiunea suportată de porţiunea cufundată x va fi $\varpi\omega x$ şi, luând momentele în raport cu B, vom avea, dacă G este greutatea scândurei,

$$G\left(\frac{l}{2} - y\right) = \varpi\omega x\,(l - y - \frac{x}{2}) .$$

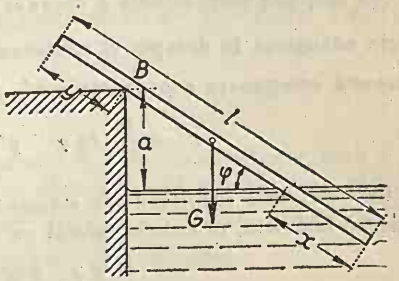


Fig. 115

Echilibrul nu este posibil decât dacă înclinarea scândurei faţă de planul orizontal este egală cu unghiul de frecare φ în B, deoarece cazul nu diferă de acela al unui corp aşezat pe un plan înclinat, cu deosebirea că aici greutatea este micşorată prin subpresiunea, care are aceeaşi direcţie şi sens opus.

Vom avea:

$$\sin\varphi = \frac{a}{l - y - x}.$$

Din aceste două ecuaţii, înlocuind $G = \varpi_1 l^{\omega}$, rezultă:

$$\varpi_1 l\left(\frac{a}{\sin\varphi} - \frac{l}{2} + x\right) = \varpi x\left(\frac{a}{\sin\varphi} + \frac{x}{2}\right),$$

care dă pe x, rezultând apoi y.

Aplicaţia Nr. 34. Un vas de secţiune dreptunghiulară are o lungime l şi o lărgime $2b$. Greutatea lui G_0 îşi are centrul în G, la distanţa a deasupra fundului.

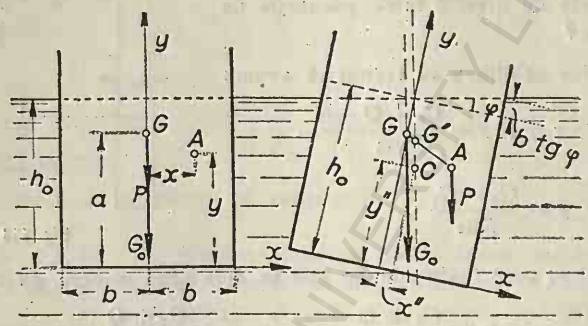


Fig. 116

Încărcătura P a vasului, aşezată la început în axă, este mutată în punctul $A\ (x, y)$. Cu ce unghiu φ se va înclina vasul?

Soluţie. Dacă G' este centrul de greutate totală şi C centrul volumului apei dislocuite (carena), G' şi C trebue să se găsească pe aceiaşi verticală.

Coordonatele lui G' în raport cu axele x, y sunt:

$$x' = \frac{Px}{P + G} \qquad y' = \frac{Py + Ga}{P + G}.$$

Dacă h_0 este adâncimea de cufundare a vasului (pescaj) înainte de mutarea încărcăturei:

$$h_0 = \frac{P + G}{2\varpi bl},$$

noua secţiune trapezoidală a carenei se poate obţine din dreptunghiul iniţial $2b\,h_0$ prin adăugirea la dreapta şi scăderea la stânga, a unui triunghiu $\frac{b^2 tg\varphi}{2}$. După această compunere coordonatele x'', y'' ale noului centru de carenă C vor fi:

$$x'' = \frac{b}{3h_0} tg\varphi \qquad y'' = \frac{1}{2}\left(h_0 + \frac{b^2}{3h_0} \cdot tg^2\varphi\right),$$

ultima expresie rezultând din momentele, faţă de C, ale greutăţilor carenelor din poziţia înclinată, orientate paralel cu baza:

$$\frac{b^2 tg\varphi}{2} \cdot \frac{b\,tg\varphi}{3} = 2bh_0\left(y'' - \frac{h_0}{2}\right).$$

Dacă înlocuim valorile găsite ale coordonatelor în

$$tg\varphi = \frac{x'' - x'}{y' - y''},$$

obţinem pentru $tg\varphi$ ecuaţia

$$tg^3\varphi + tg\varphi\left[2 + \frac{3(P+G)^2}{4\varpi^2 b^4 l^2} - \frac{3(Py+Ga)}{\varpi b^3 l}\right] = \frac{3Px}{\varpi b^3 l}.$$

Aplicaţia Nr. 35. A se calcula presiunea rezultantă P pe suprafaţa laterală (manta) a unui cilindru de secţiune Ω *de oric formă* cufundat în apă, *a* cărui axă formează unghiul α cu verticala (vezi fig. 66).

Soluţie. Chestiunea a fost tratată la aplicatia No. 22, însă aci vom da o soluţie aproape imediată, bazată pe principiul lui *Arhimede*.

In acest scop să ducem planul secţiunei drepte mijlocii a cilindru'ui, iar prin urma aestui plan pe planul de apă să ducem planul paralel cu cilindru, care poate reprezenta un plan fictiv de apă inclinat.

Să luăm o fâşie elementară a mantalei cuprinsă între două generatrice infinit vecine. Presiunea resultantă pe fâşie va fi evident cuprinsă în planul mijlociu menţionat şi egală cu ϖz_m unde z_m este cota mijlocului fâşiei care este cota medie, putând-se scrie de asemenea $\varpi z'_m \sin\alpha$, unde z'_m este cota aceluiaşi punct faţă de planul de apă fictiv.

Rezultantanta generală a tutulor aceestor rezultante parţiale va fi, aşa dar, înmulţită cu $\sin\alpha$, rezultanta presiunilor pe manta faţă de planul de apă fictiv, adică supresiunea lui *Arhimede* $\varpi\Omega l$ într'un câmp de gravitaţie orientat normal pe acest p'an, deci

$$P = \varpi\Omega l \sin\alpha,$$

de oarece, în acest caz, presiunile pe baze se echilibrează reciproc.

Aplicaţia Nr. 36. La dispozitivul ridicător de vase al soc. „Felten & Guillaume Uzinele Lahmeyer" din Frankfurt a/M, greutatea camerei de imersiune C inclusiv conţinutul, compus din o anumită cantitate de apă şi vasul V, este contrabalansată de greutatea P, care alunecă pe o cale.

Cum trebue trasată această cale pentru ca, în timpul ridicării camerei, aceasta să rămână în echilibru în orice poziţie?

Soluţie. Dacă G este greutatea camerei inclusiv conţinutul, x adâncimea ei variabilă de cufundare (*pescaj*), tensiunea t în cablu va fi: $t = G - \varpi\Omega x$. Pentru $t = 0$ avem pentru x valoarea maximă

$$h_0 = \frac{G}{\varpi\Omega}.$$

In această poziţie contragreutatea se va afla în punctul ei cel mai înalt A, când lungimea r a cablului OB devine $OA = a$. Pentru o altă poziţie vom avea: $x + r = h_0 + a = k$. Ori, dacă φ este unghiul dintre $\bar{r}$ şi tangenta la cale, iar ψ unghiul dintre $\bar{r}$ şi verticală, echilibrul după această tangentă cere:

$$P\cos(\psi + \varphi) = t\cos\varphi$$

sau, introducând valoarea lui t,

$$P(\cos\psi - \sin\psi \cdot tg\varphi) = G - \varpi\Omega(k - r).$$

Admițând că punctul de contact O al cablului pe scripete este aproximativ fix, știm că pentru orice curbă avem în cordonate polare r, ψ relația

$$tg\varphi = \frac{r\,d\psi}{dr},$$

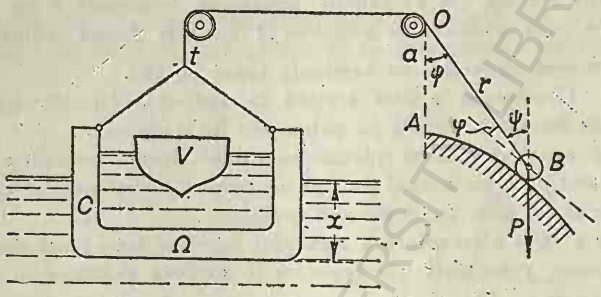


Fig. 117

care permite eliminarea lui $tg\varphi$:

$$P(\cos\psi\,dr - r\sin\psi\,d\psi) = [G - \varpi\Omega(k - r)]\,dr$$

și după integrare

$$r\cos\psi = Mr + Nr^2 + b,$$

notându-se

$$M = \frac{G - \varpi\Omega k}{P} \quad \text{și} \quad N = \frac{\varpi\Omega G}{2P}.$$

Constanta de integrare b se determină din condițiile inițiale $r = a$ pentru $\psi = 0$, în care caz poziția contragreutății este în A. Obținem astfel ecuația curbei în coordonate polare cu origina în O:

$$r\cos\psi = a + M(r - a) + N(r^2 - a^2).$$

Aplicația Nr. 37. Să se studieze stabilitatea unui cilindru de rază r și lungime l, greutatea lui specifică fiind ϖ_1.

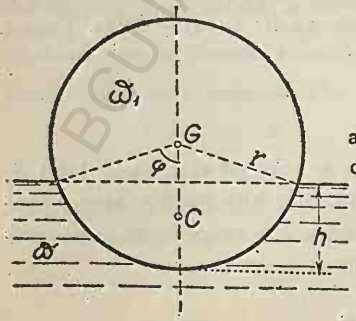


Fig. 118

Răspuns. Principiul lui *Arhimede* dă:

$$\pi r^2 l\,\varpi_1 = \frac{1}{2}r^2(2\varphi - \sin 2\varphi)\,l\varpi,$$

astfel că poziția de echilibru a plutitorului este dată de valoarea lui φ scoasă din relația:

$$2\varphi - \sin 2\varphi = 2\pi\frac{\varpi_1}{\varpi}.$$

Adâncimea de cufundare este

$$h = r(1 - \cos\varphi).$$

Dacă S este aria segmentului cufundat, se știe că distanța baricentrului C la centrul G al cercului este egală cu cubul coardei împărțită cu $12\,S$.

Avem așa dar:

$$GC = \frac{(2r\sin\varphi)^3}{12\,S},$$

pentru înălțimea centrului de greutate deasupra centrului de carenă.

Cum pe de altă parte

$$V = Sl \quad \text{și} \quad I = \frac{1}{12}(2r\sin\varphi)^3 l$$

și deci

$$\rho = \frac{I}{V} = \frac{(2r\sin\varphi)^3}{12\,S},$$

rezultă $GC = \rho$, adică metacentrul cade chiar în G.

Echilibrul va fi deci indiferent, ceeace era evident a priori, din cauză că la ori ce inclinare a plutitorului situația rămâne aceeași, adică G_0 și P nu se schimbă nici ca mărime nici ca poziție față de plutitor.

Aplicația Nr. 38. Să se studieze stabilitatea unui gazometru de rază R și înălțimea H, presupus inițial umplut până la margine cu gaz, la presiunea atmosferică normală, și scufundat apoi cu gura deschisă în apă. Se va neglija sfericitatea fundului, luându-se drept capacitatea gazometrului și deci ca volum inițial al gazului: $V_0 = \pi R^2 H$.

Soluție. Fie G_0 greutatea gazometrului pe lângă care vom neglija pe aceea a gazului. Gazometrul din cauza greutății lui se va scufunda în parte, gazul din interior comprimându-se dela p_0 la p_1. Intradevăr, va trebui ca greutatea apei dislocuită (pe o înălțime h_0, care se va menține ca medie și în caz de inclinare) să fie egală cu G_0. Făcând abstracție de apa dislocuită de pereți în partea lor scufundată (ei fiind foarte subțiri), vom avea pentru echilibru $\varpi h_0 \pi R^2 = G_0$.

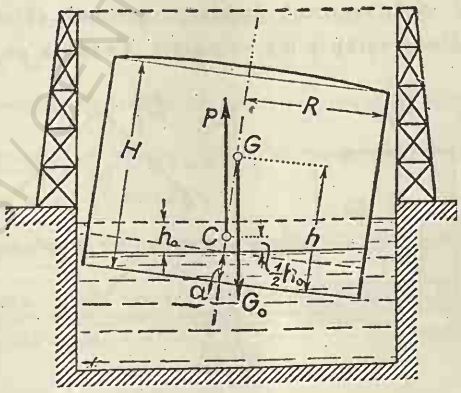


Fig. 119

Înălțimea piezometrică h_0 măsurând diferența de presiune $p_1 - p_0$ a presiunilor cari domină la nivelul interior și cel exterior al apei, vom scrie

$$p_1 - p_0 = \varpi h_0 = \frac{G_0}{\pi R^2}.$$

După legea lui *Mariotte* vom avea

$$\frac{p_1}{H} = \frac{p_0}{H-a} = \frac{p_1 - p_0}{a},$$

de unde

$$a = H\frac{p_1 - p_0}{p_1} = H\frac{G_0}{\pi R^2 p_1} = H\frac{G_0}{\pi R^2\left(p_0 + \frac{G_0}{\pi R^2}\right)} = H\frac{G_0}{G_0 + \pi R^2 p_0}.$$

Înălţimea h a baricentrului G al gazometrului deasupra marginei acestuia, presupunând fundul plan, va fi

$$h = \frac{2\pi RH \cdot H/2 + \pi R^2 H}{2\pi RH + \pi R^2} = \frac{H(H+R)}{2H+R}.$$

Înălţimea lui G deasupra centrului de carenă C va fi atunci

$$\overline{GC} = h - a - \frac{h_0}{2} = \frac{H(H+R)}{2H+R} - H\frac{G_0}{G_0 + \pi R^2 p_0} - \frac{G_0}{2\pi R^2 \varpi}.$$

Condiţia de stabilitate va fi

$$\overline{GC} < \frac{I}{V},$$

unde momentul de inerţie I al ariei de plutire faţă de ori ce diametru este $\frac{\pi R^4}{4}$, iar carena $V = \pi R^2 h_0$,

Aplicaţia Nr. 39. Să considerăm o prismă omogenă — d. e. o grindă de lemn — cu secţiune pătrată, de latură a şi o lungime indefinită, plutind pe apă, şi să studiem stabilitatea la plutire a acestei prisme.

Soluţie. Fie $d < 1$ raportul densităţii prismei către aceea a apei, care este şi raportul dintre greutăţile lor volumice. Condiţia de echilibru ca centrul

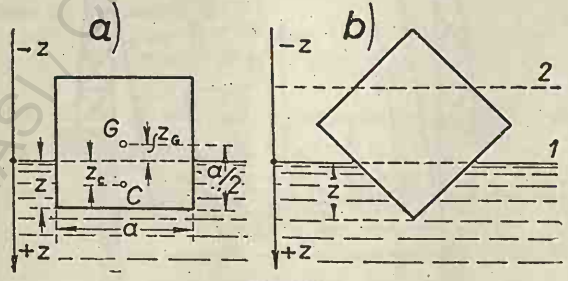


Fig. 120

de greutate şi centrul de carenă să fie pe aceeaşi verticală, poate fi realizată în special pentru următoarele poziţii simetrice:

a) când două din feţe sunt paralele cu suprafaţa lichidului, şi

b) când feţele sunt înclinate la 45°, prisma având atunci o singură muchie sau trei muchii în lichid, după cum $d \lessgtr 0{,}5$.

Să vedem în ce împrejurări fiecare din aceste poziții este stabilă. Să luăm o lungime egală cu unitatea, ocupându-ne numai de stabilitatea prismei în sens transversal.

In cazul a) avem:

$$V = za\,;\quad V_0 = a^2\,;\quad d = \frac{z}{a}$$

$$I = \frac{a^3}{12}\,;\quad r^2 = \frac{a^2}{12}\,;\quad \Omega = a\,;\quad h_0 = z$$

$$\frac{r^2}{h_0} = \frac{a^2}{12z}\,;\quad z_C = \frac{z}{2}\,;\quad z_G = z - \frac{a}{2}\,;\quad z_C - z_G = \frac{a-z}{2}\,.$$

Condiția de stabilitate va fi:

$$l = \frac{a^2}{12z} - \frac{a-z}{2} > 0\,.$$

Cum trinomul din primul membru se anulează pentru

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

adică pentru $d = 0{,}212$ și $d = 0{,}788$, pentru ca el să fie pozitiv trebue ca d să fie în afară de rădăcini, adică $< 0{,}212$ sau $> 0{,}788$.

In cazul b_1) (cu o singură muchie muiată)

$$V = z^2\,;\quad V_0 = a^2\,;\quad d = \frac{z^2}{a^2}\,;\quad I = \frac{(2z)^3}{12}\,;\quad \Omega = 2z$$

$$r^2 = \frac{(2z)^2}{12} = \frac{z^2}{3}\,;\quad h_0 = \frac{V}{\Omega} = \frac{z}{2}\,;\quad \frac{r}{h_0} = \frac{2}{3}\,z\,;\quad z_C = \frac{z}{3}$$

$$z_G = z - \frac{\sqrt{2}}{2}\,a \qquad z_C - z_G = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a - \frac{2}{3}\,a\,,$$

de unde $l = \frac{4}{3}\,z - \frac{\sqrt{2}}{2}\,a > 0$ este condiția de stabilitate.

Această normă dă:

$\frac{z^2}{a^2} > \frac{9}{32} = 0{,}281$ și rezultă că trebue să avem $\frac{z^2}{a^2} = d > 0{,}281$.

Tot astfel deducem că pentru cazul b_2) — cu trei muchii muiate — stabilitatea impune condiția $d < \frac{23}{32} = 0{,}719$.

Discuția se poate rezuma în tabloul din figura următoare:

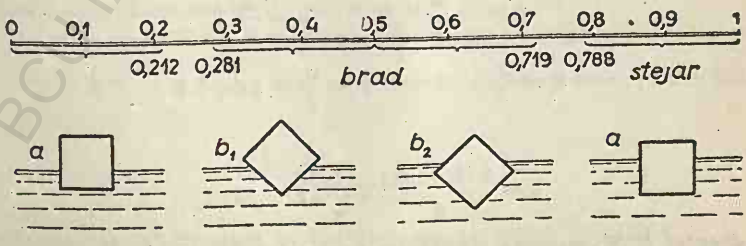


Fig. 121

Rezultă că, din felul cum pluteşte pe apă o bucată de lemn prismatică cu secţiune pătrată, se poate recunoaşte dacă este stejar sau brad: în cazul stejarului ($d=0{,}87$) prisma va pluti având feţele paralele cu planul de apă; în cazul bradului ($d = 0{,}49$) ea va pluti cu feţele înclinate la 45^0.

Pentru d cuprins în intervalele $0{,}212-0{,}281$ şi $0{,}719-0{,}788$ nici una din poziţiile a) şi b) nu este stabilă. Prisma va lua atunci poziţii de înclinare intermediare.

Pentru prismele cu secţiune dreptunghiulară se poate face un studiu analog.

Studiul complet al prismei cu secţia pătrată arată că, în planul de simetrie al secţiunei drepte mijlocii a prismei, conţinând baricentrul G, secţiunea suprafeţei (C) se compune din 4 arcuri de parabolă şi 4 de hiperbolă, ultimele reducându-se pe măsură ce d se apropie de valoarea $0{,}5$, pentru care ele dispar complet; parabolele au axele lor paralele cu laturile secţiunii pătrate a prismei, iar hiperbolele au drept axe diagonalele acelei secţiuni. De altfel suprafeţele (C), pentru d_1 şi d_2 a căror sumă este 1, corespund la carene *complementare* (de sumă constantă), fiind (cum uşor se poate demonstra) omotetice în raport cu G de o parte şi de alta a lui G.

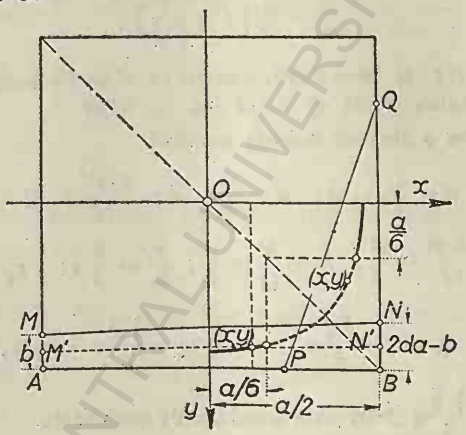


Fig. 122

Iată studiul în chestiune.

In cazul când linia de apă MN desparte o carenă trapezoidală $ABNM$, să stabilim ecaţia urmei (C) a suprafeţei de carenă, care este, precum am spus, o parabolă.

Ecuaţia de formă $y = mx + n$ a dreptei MN faţă de axele Oxy, trebuind să fie satisfăcută de cordonatele punctelor M şi N:

$$x = -\frac{a}{2} \qquad y = \frac{2}{a}\, b$$

$$x = \frac{a}{2} \qquad y = \frac{a}{2} - 2da + b$$

este:

$$y = \frac{2(b - da)}{a} + \frac{2}{a}(1 - 2d).$$

Ecuaţia dreptei $M'N'$, mediana trapezului pe care se găseşte baricentrul acestuia C, se obţine, luând pentru aceleaşi abscise ordonatele medii ale dreptelor MN şi AB:

$$\frac{y + a/2}{2}.$$

Abscisa baricentrului C este brațul de moment, față de Oy, a greutății trapezului, compusă din greutățile triunghiurilor componente, proporționale cu bazele $MA = b$ și $NB = 2da - b$ și cari trec prin punctele $-\frac{a}{6}$ și $+\frac{a}{6}$ ale laturei AB. Cum această abscisă este

$$x_C = \frac{da - b}{6d},$$

introducând-o în ecuația lui $M'N'$, obținem ordonata

$$y_C = \frac{y + \frac{a}{2}}{2} = -\frac{(b - da)^2}{6da} + \frac{a}{2}(1 - d),$$

și prin eliminarea parametrului b ecuația parabolei:

$$y = \frac{a}{2} - da\left(\frac{1}{2} + \frac{6x^2}{a^2}\right).$$

Coeficientul unghiular al tangentei este:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12\,dx}{a},$$

iar pentru $x = \frac{a}{6}$ (ordonata corespunzătoare fiind $y = \frac{a}{2} - \frac{2da}{3}$) avem

$$\frac{dy}{dx} = -2d.$$

In cazul când linia de apă PQ desparte o carenă triunghiulară BQP, ecuația urmei suprafeței (C), care este o hiperbolă, se obține exprimând aria acelui triunghiu:

$$da^2 = \frac{BP \times BQ}{2} = \frac{9}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{a}{2} - y\right).$$

Coeficientul unghiular al tangentei este

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a - 2y}{a - 2x} = -\frac{8da^2}{9(a - 2x)^2} = -\frac{9(a - 2y)^2}{8da^2},$$

iar pentru $x = \frac{a}{6}$ $\left(\text{și } y = \frac{a}{2} - \frac{2da}{3}\right)$ avem deasemenea $\frac{dy}{dx} = -2d$, ceea ce arată că racordarea celor două arcuri de curbă se face tangențial.

Bine înțeles, la punctul de racordare simetric, față de diagonala OB, cu coordonatele $y = \frac{a}{6}$ și $x = \frac{a}{2} - \frac{2da}{3}$, vom avea pentru ambele curbe (arcul parabolei cu axa Ox)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2d},$$

adică cotangenta unghiului format cu Ox de tangenta primei racordări.

BUCUREȘTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să examinăm acum numărul pozițiilor de stabilitate în legătură cu numărul normalelor duse din G.

a) Pentru toate densitățile *necuprinse între 0,212 și 0281* precum și *între 0,719 și 0,788* se pot duce $n = 10$ *normale* din G pe suprafața (C).

Există deci 10 poziții de echilibru (dintre cari 8 în planul menționat de simetrie): 6 absolut stabile sau instabile și 4 mixte. Pentru cele două poziții absolut instabile în cazul unei lungimi mai mari a prismei, aceasta ocupă cu lungimea ei poziția verticală. Cunoaștem, după densitate, cele 4 poziții absolut stabile, corespunzând fie la câte două perechi de fețe laterale orizontale fie planurilor diagonale orizontale. Cele 4 poziții de echilibru mixt, corespund invers, fie planurilor diagonale orizontale fie la câte două perechi de fețe laterale orizontale.

Pentru toate aceste 8 poziții există stabilitate la tangaj.

b) Pentru toate densitățile *cuprinse între 0,212 și 0 281 și între 0,719 și 0,788* avem $n = 18$ poziții de echilibru. Cele 8 poziții de echilibru mixte corespund celor două perechi de fețe laterale orizontale și celor două planuri diagonale orizontale.

Cele 2 poziții absolute instabile corespund, ca și la *a*), pozițiilor cu lungimea în sensul vertical. In fine, cele 8 poziții absolut stabile corespund fețelor laterale înclinate. Simetria cere ca să fie 8 asemenea poziții, câte două de fiecare muchie laterală.

In planul secțiunei mijlocii se poate duce evident, pe urma suprafeței (C), $n - 2$ normale (cele 2 normale ale lui (C) corespunzătoare pozițiilor instabile fiind perpendiculare pe secțiune, adică după axa longitudinală a prismei) și de aceea stu-

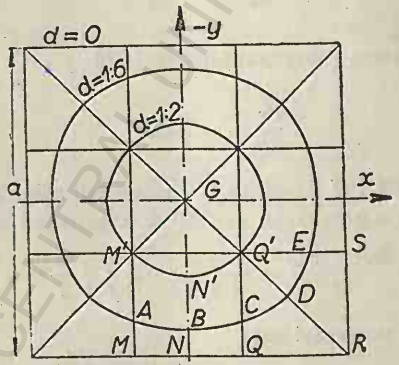


Fig. 123

diul se poate limita la urma lui (C) dată de secțiunea dreaptă mijlocie a prismei, și chiar numai pentru densitățile $0 < d < 0{,}5$, grație ometetiei menționate în raport cu G.

In ceeace privește cazurile particulare, putem distinge:

c) *Cazuri limite*: $d = 0$, când urma lui (C) este chiar conturul secțiunii prismei; MNQ este arcul parabolei, QRS arcul hiperbolei.

Pentru $d = 0{,}5$ arcurile parabolei $M'N'Q'$ se racordează tangențial pe diagonale, arcurile hiperbolei dispărând.

In ambele cazuri normalele duse din G pe urma lui (C) sunt axele sau diagonalele. In primul caz $(d = 0)$ normalele după diagonale sunt cele mai lungi.

In al doilea caz $(d = 0{,}5)$ invers, astfel că pozițiile echilibrului stabil sunt intervertite.

d) *Cazuri intermediare.* Cât timp echilibrul este stabil în poziția figurată, centrul de curbură al parabolei ABC în B este deasupra lui G, din care punct nu se poate duce decât o singură normală la parabolă.

Cele trei normale ce se pot duce la fiecare arc de hiperbolă (a patra cade în afară pe cealaltă ramură) nu prezintă stabilitate ($4+4.3=16$ normale). Presupunând că d ar crește treptat dela 0, din momentul când echilibrul devine nestabil ($d \leq 0{,}212$) există trei normale reale (la parabola ce se apropie de centrul G), cari, la început cufundate, se desfac, două din ele depărtându-se de o parte și alta a axei Gy pe măsură ce d crește. Aceste două pot procura poziții de echilibru stabil, cât timp cad pe arcul util $\left(|x| < \frac{a}{6}\right)$, normala principală ne mai prezentând stabilitate.

De asemenea făcând să descrească d dela $0{,}5$, cât timp echilibrul este stabil, cu diagonala GK verticală, centrul de curbură al hiperbolei CDE pentru punctul D este deasupra lui G, de unde nu se poate duce decât o singură normală pe hiperbolă. Cele trei normale ce se pot duce din G la fiecare arc de parabolă nu prezintă stabilitate (16 normale în total).

Începând din momentul când echilibrul devine nestabil ($d \leq 0{,}281$), se pot duce trei normale pe hiperbolă, cu aceeași observație, arcul util fiind cuprins în unghiul $QQ'S$ sau oricare din celelate trei unghiuri simetrice.

Așa dar, pe o parabolă și o hiperbolă, cărora le aparțin arcurile BC și CD, pe o curbă (C) cu d cuprins între $0{,}212$ și $0{,}281$, se pot duce 6 normale, deci în total 24. Din punct de vedere geometric, d crescând dela 0 la $0{,}5$, ar trebui să existe în planul figurei, după cum rezultă din ceeace precede:

16 normale în cazul $0{,}000 < d < 0{,}212$ (câte una la parabole și câte trei la hiperbole)

24 „ „ „ $0{,}212 < d < 0{,}281$ (câte trei la parabole și câte trei la hiperbole)

16 „ „ „ $0{,}281 < d < 0{,}500$ (câte una la hiperbole și câte trei la parabole).

Cum însă știm precis că în aceste intervale există numai 4, 8 și 4 poziții de echilibru perfect stabil în planul figurei, cele perfect nestabile din același plan dar mixte în spațiu (din cauza stabilității în sensul tangajului) fiind în număr de încă 4, 8, 4, numărul normalelor utile nu poate fi decât 8, 16, 8; restul normalelor considerate în plan, în număr de 8 în toate cele trei cazuri, corespund la arcuri neutile ale parabolelor și hiperbolelor trasate (ceeace se poate vedea și direct, după cum s'a explicat mai sus).

Bine înțeles, considerând problema în spațiu, adică și cu cele două normale la (C), perpendicular pe planul figurei, cari reprezintă poziții perfect instabile, vom avea în total 6, 10, 6 poziții perfect stabile sau instabile, pozițiunile de echilibru mixt fiind în număr respectiv de 4, 8, 4, după cum am văzut mai sus.

Se poate arăta și pe altă cale că, în intervalul de densități $0{,}212 < d < 0{,}281$, din cele 6 normale duse din G, câte trei pe o parabolă și pe o ramură de hiperbolă cu arcuri adiacente $A'C'$ și $C'E'$ (analog ca AC și CE), și anume: GB' și GD' și câte o pereche de normale simetric așezate de o parte și de alta a acestor normale, în loc de a avea ca inutile ambele normale ce cad între GB' și GD', numai

una din acestea se bucură de această proprietate. Intradevăr, pentru menţionatul interval, normalele GB' şi GD', corespunzând poziţiunilor *instabile* în plan (sau *mixte* în spaţiu), vor reprezenta distanţe maxime dela G la curba (C). Ori, între două raze maxime din G nu poate fi decât un număr impar de raze vectoare minime şi cum în realitate nu pot cădea între B' şi D', precum am spus, decât două normale, se vede că una din acestea va cădea în afara arcurilor utile.

Cum avem 8 asemenea arcuri $B'D'$, 8 din normalele ce se pot duce din G la curba (C) cad pe arcuri inutile.

Aplicaţia Nr. 40. *Stabilitatea unui cheson.* Vom considera un cheson de greutate G_0 destul de lung, pentru a ne putea limita la studiul stabilităţii lui transversale. Cât timp înclinarea nu întrece unghiul POS (Fig. 124), curba desfăşurată a suprafeţei (P) se reduce la punctul O. Să găsim urma secţiunei suprafeţei (C), care este aceeaşi cu a cilindrului de contur aparent, normal pe planul figurei — plan de înclinaţie — .

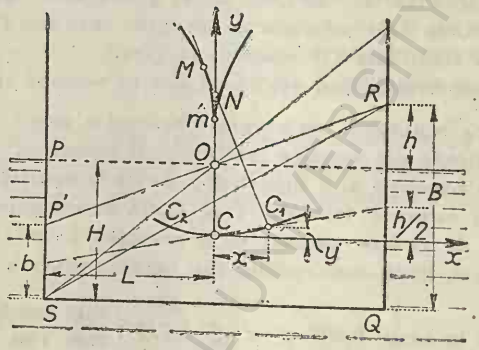


Fig. 124

Luăm ca axe: Cx şi Cy cu origina în centrul normal de carenă C, H fiind adâncimea de cufundare; avem $OC = \frac{H}{2}$. Pentru planul de plutire P', definit de denivelarea h, vom determina baricentrul C_1 al trapezului $SP'RQ$, având ca baze paralele:

$$B = H + h \qquad b = H - h$$

iar ca înălţime $2L$.

Prin baricentrul căutat trece rezultanta greutăţilor celor două triunghiuri $RP'S$ şi RQS, proporţionale cu bazele lor B şi b şi trecând la $\frac{2}{3}L$ de aceste baze deci la distanţe egale cu $\frac{L}{3}$ de Cy. Abscisa căutată va rezulta deci din egalitatea raporturilor

$$\frac{\frac{L}{3} + x}{\frac{L}{3} - x} = \frac{H + h}{H - h}, \text{ de unde } x = \frac{hL}{3H}.$$

Baricentrul C_1 se mai găseşte pe mediana trapezului, trecând prin C, iar din asemănarea triunghiurilor scoatem

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{h}{2}}{L}.$$

Prin eliminarea parametrului h obținem ecuația curbei căutate

$$y = \frac{3H}{2L^2} x^2,$$

care este o parabolă, având în C raza de curbură (determinabilă și direct prin teorema lui *Dupin* $\rho = \frac{I}{V}$)

$$\rho = \frac{L^2}{3H},$$

și care ne dă micul metacentru m. Distanța D' la fundul chesonului va fi cu $\frac{H}{2}$ mai mare:

$$D' = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{3H}.$$

Ca echilibrul să fie stabil, centrul de greutate al plutitorului trebue să se găsească la o distanță D_0 de fund, astfel ca

$$D_0 < D'.$$

Să calculăm stabilitatea pentru inclinația α. In acest scop să determinăm punctul N unde normala din C_1 a parabolei tae axa Cy. Din ecuația normalei:

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy = 0,$$

punând

$$X = 0 \quad \text{și} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3H}{L^2} x = tg\,\alpha,$$

găsim ordonata

$$Y = y + \frac{L^2}{3H} = \frac{L^2}{3H}\left(1 + \frac{tg^2\,\alpha}{2}\right).$$

Pentru $\alpha = 20^0$ avem $tg\,\alpha = 0{,}36$ și $0{,}5\,tg^2\,\alpha = 0{,}065$. Rezultă că până la această inclinație se face o eroare $< 7\%$, dacă înlocuim pe N prin matacentrul m. Momentul cuplului de îndreptare este:

$$M = G_0\,(Y - a)\,\sin\alpha = G_0\left[\frac{L^2}{3H}\left(1 + \frac{tg^2\,\alpha}{2}\right) - a\right]\sin\alpha,$$

a fiind distanța CG, socotită pozitivă în sus de C.

Dacă $2L'$ este lungimea chesonului ($G_0 = 4\,\omega\,LL'H$), expresia cuplului va fi pentru unghiurile mici (neglijând termenul cu tg)

$$M = \left[\frac{4}{3}\,\omega\,L'L^3 - G_0\,a\,\sin\alpha\,M_0\,\sin\alpha\right].$$

Să presupunem acum că adăugăm greutăți: cuplul de îndreptare depinde de produsul variabil $G_0\,a$, descrescând atunci când centrul de gravitate rămâne în ace-

laşi punct (*a* neschimbat) şi *a fortiori* când el se urcă (*a* crescând). Cuplul poate creşte dacă greutaţile sunt puse foarte jos, în care caz micşorarea lui *a* poate mai mult decât să compenseze creşterea lui G_0. Cuplul de stabilitate rămâne invariabil, dacă greutatea adaosă se găseşte în chiar planul de plutire, mai precis, în baricentrul creşterii ΔV a carenei.

Dacă adăugăm greutatea G_1 la înălţimea h_1 deasupra planului de plutire normal şi la distanţa d de longitudinal, înclinarea α pe care o va lua chesonul va fi dată de relaţia:

$$G_1 d \cos \alpha = (M_0 - G_1 h_1) \sin \alpha ,$$

unde $M_0 \sin \alpha$ este cuplul de stabilitate pentru unghiul α înainte de adaosul greutăţii G_1.

Aplicaţia Nr. 41. *Stabilitatea unui cheson cu încărcătură lichidă la înclinaţii mici*

Să studiem stabilitatea unui plutitor cu încărcătură lichidă (vas cu petrol sau cu apă).

Teoremele carenei variabile sunt aplicabile şi încărcăturei lichide, sensul forţei fiind numai inversat.

Să considerăm chesonul din aplicaţia precedentă, atribuindu-i o oarecare greutate, dar neglijând grosimea pereţilor.

Fie G baricentrul părţii rigide, G' greutatea totală, G'' aceea a lestului.

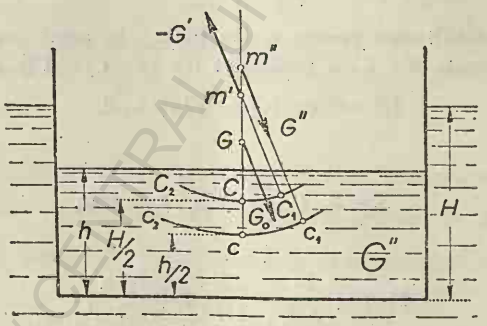


Fig. 125

Pentru mici înclinaţii subpresiunea este aplicată în punctul fix m' — metacentrul iniţial, la punctul de înapoiere al desfăşuratei curbei centrelor de carenă CC_1 —.

Aplicând teoria la lestul lichid, constatăm că şi greutatea (în loc de subpresiunea) acestuia trece printr'un punct fix m'' — punctul de înapoiere al desfăşuratei curbei cc_1 descrisă de baricentrul lestului —.

Fie H adâncimea de imersiune şi h aceea a lestului, în poziţia normală.

Distanţele D' şi D'' ale punctelor m' şi m'' de fundul chesonului sunt, analog ca la problema precedentă,

$$D' = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{3H}, \qquad D'' = \frac{h}{2} + \frac{L^2}{3h}.$$

In realitate avem o rezultantă $G' - G''$ a subpresiunei G' şi a presiunei lichidului din interior G'', în prezenţa greutăţii părţii rigide. Această rezultantă trece

și ea printr'un anumit punct fix, aflat la distanța D de fundul chesonului, dată de relația

$$(G' - G'')\, D = G'D' - G''D''. \qquad (1)$$

Acest punct fix, comparat cu metacentrul obișnuit din cazurile studiate până acum, se poate privi, ca și metacentrul în cazul chesonului gol, drept punctul de suspensie al părții rigide a chesonului. Fie D_0 distanța de fund a baricentrului G al părții rigide; condiția de echilibru este

$$D_0 < D. \qquad (2)$$

Fie ϖ' greutatea volumică a lichidului exterior și ϖ a lichidului interior; să înlocuim în (1) D' și D'' prin valorile lor pentru a afla valoarea lui D, introducând-o în condiția de echilibru (2):

$$(\varpi' - h\varpi'') = \varpi' \left(\frac{H}{2} + \frac{L^2}{3}\right) - \varpi'' \left(\frac{h^2}{2} + \frac{L^2}{3}\right).$$

In caz de același lichid în exterior și interior ($\varpi' = \varpi''$) formula devine:

$$D = \frac{H+h}{2}.$$

Această formulă, aplicabilă pentru orice valoare finită a lui h, încetează de a mai fi dacă $h = 0$, fiindcă atunci găsim $D = \frac{H}{2}$, pe când știm că avem de fapt $D = D' = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{3H}$. Rezultă că introducerea unei cantități foarte mici de apă în cheson modifică complet condițiile de echilibru, căci în loc de condiția

$$D_0 < \frac{H}{2} + \frac{L^2}{3H}$$

pentru chesonul fără apă, după introducerea acelei ape trebue să avem (admițând aproximativ același H)

$$D_0 < \frac{H}{2} + \frac{h}{2},$$

condiție evident mai grea.

Dacă partea din aer a chesonului este destul de înaltă astfel încât, cu toată greutatea fundului (care coboară pe G sub mijlocul înălțimei totale a pereților verticali) să avem

$$D_0 = \frac{H_0}{2} + \eta,$$

unde H_0 este înălțimea de imersiune a chesonului gol și η pozitiv dar $< \frac{L^2}{3H_0}$, condiția de stabilitate

$$D_0 < \frac{H_0}{2} + \frac{L^2}{3H_0}$$

este satisfăcută; totuși, plutirea în poziția normală încetează după introducerea unei cantități mici de apă, care reclamă inegalitatea

$$D_0 = \frac{H_0}{2} + \eta < \frac{H}{2} + \frac{h}{2},$$

ce poate să nu fie satisfăcută din cauza micimei lui h.

Dacă se continuă cu umplerea cu apă şi neglijăm grosimea pereţilor (în care caz H şi h cresc cu aceeaşi cantitate), adică dacă de la H_0 la H ar fi cât şi de la 0 la H sau $H = H_0 + h$, în acest caz.

$$D = \frac{H+h}{2} = \frac{H_0}{2} + h,$$

ceeace arată că, pentru reasigurarea stabilităţei, trebue introdusă destulă apă pentru ca h să devie mai mare ca η. Momentul când se reobţine stabilitatea ($h = \eta$) este atins atunci când înălţimea apei din cheson h este egală cu înălţimea primitivă η a baricentrului G al chesonului faţă de centrul de carenă corespunzător $\left(\text{când } \eta + \frac{H_0}{2} = D_0\right)$.

Aplicaţia Nr. 42. *Echilibrul unui clopot complet cufundat.*

Un clopot de greutate G_0 — aplicat în baricentrul G, fix faţă de pereţi — este cufundat în apă, astfel ca aerul să rămână închis în el. Pentru simplificare vom presupune că volumul de aer rămâne constant şi de o greutate volumică neglijabilă faţă de aceea a apei. Să ne închipuim clopotul închis la partea inferioară printr'un fund plan AB fără greutate, pentru a nu modifica condiţiile de echilibru.

Să luăm un plan de simetrie al clopotului, ca plan al figurei.

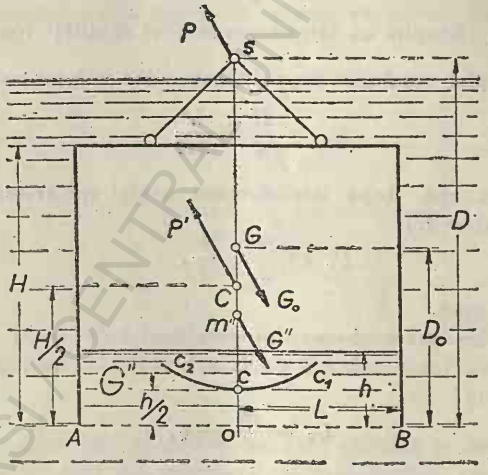


Fig. 126

Fie G'' greutatea invaribabilă a lichidului interior; ea trece prin metacentrul m''.

Pentru a completa echilibrul, să susţinem clopotul prin forţa P, aplicată în punctul de suspensie S al clopotului şi care va fi evident:

$$P = G_0 + G'' - P'.$$

Condiţia de echilibru stabil în cazul figurei este, ca punctul de aplicaţie al rezultantei forţelor G'' şi G_0 să fie sub punctul de aplicaţie al forţelor P' şi P. Luând

momentele în raport cu centrul O al fundului fictiv, această condiție se exprimă prin neegalitatea:

$$DP + \frac{H}{2} P' > G'' \left(\frac{h}{2} + \frac{L^2}{3h} \right) + G_0 D_0 .$$

Evident trebue ca G să fie cât mai jos posibil — D_0 mic — și, de aceea, încărcând marginea de jos a clopotului se asigură stabilitatea.

Mai e nevoie ca h să nu fie prea mic; când h este foarte mic sau nul, clopotul nu se mai poate ține în echilibru, decât fixând prin legături partea lui inferioară. De asemenea și fluiditatea încărcăturei G'' micșorează stabilitatea. Dacă G'' ar deveni rigidă, greutatea ei n'ar mai trece prin m'' ci prin c, adică cu atât mai jos cu cât h ar fi mai mic.

Din inegalitatea de mai sus se mai vede că poziția cât mai înaltă a punctului de suspensie S este favorabilă stabilității.

Aplicația Nr. 43. *Stabilitatea unui submarin.* Submarinul este un vas care poate naviga la suprafață și sub apă. La suprafață condițiile de echilibru stabil sunt aceleași ca pentru toate vasele, adică baricentrul G al plutitorului trebue să fie sub micul metacentru; în practică, precum vom vedea, el este chiar sub C.

In stare cufundată subpresiunea trece prin centrul fix C al carenei pline, sub care trebue să se găsească G pentru stabilitate. Nu există atunci de cât *stabilitate de greutate*, ceea de formă fiind nulă. Pentru a trece dela suprafață la navigarea între două ape, plutitorul trebue încărcat iar baricentrul său G scoborît; aceasta se obține introducându-se apă suficientă în balasturile dispuse la partea inferioară a carcasei. Cum, după cele expuse în aplicația precedentă, un lest lichid este în general cauza unei micșorări a stabilității, atât timp, cât rezervoarele nu sunt pline, trebue căutat a avea la suprafață o stabilitate suficientă pentru a rămâne pozitivă în timpul manevrei.

După obținerea egalității $G_0 = P$ submarinul este în echilibru numai *teoretic*, căci în realitate, echilibrul după verticală fiind instabil, din cauza compresibilității submarinului, mai mari de cât a apei, sub acțiunea presiunei ce crește cu adâncimea, submarinul are tendința să meargă accelerat la fund, contribuind la aceasta și lipsa de perfectă etanșeitate a vanelor cari închid balasturile. De aceea un submarin liber nu se poate menține *pe loc*, la o anumită adâncime *medie* determinată, de cât numai cu o succesiune de urcări și coboriri prin expulzarea sau pomparea apei în balasturi, prin cârme cu axă orizontală, etc.

La adâncimi relativ mici ale mărei (de ordinul de 50 m) se întrebuințează pentru stabilitate procedeul funiei de ghidare: *guiderope*, despre care se va vorbi la *Aerostatică*.

Cum submarinul trebue să reziste la presiunea apei, i se dă de preferință forma cilindrică, a cărei *stabilitate de formă*, la navigarea la suprafață, este nulă. Se impune deci un arimaj astfel ca G să fie sub C. Să examinăm stabilitatea unui submarin cilindric scufundat, propulsat prin o elice cu axă orizontală. Dacă vasul vrea să se apropie sau să se depărteze de suprafață, trebue să poată schimba orientarea axei sale de simetrie. Pe de altă parte, chiar în repaos, axa se înclină dacă oamenii trec de la pupă la proră sau vice-versa. De aci necesitatea de a modifica în fie ce moment poziția de echilibru longitudinal stabil, prin cârme cu axe orizontale și normale pe axa vasului.

Cârma orizontală este mai mică și așezată la pupă, alteori ea este dublă și dispusă lateral de ambele părți.

Distanţa de la suprafaţă este indicată de un manometru, iar inclinarea momentană a axei este dată de un pendul.

Aplicaţia Nr. 44. *Docuri plutitoare.* Problema stabilităţei cu încărcătură lichidă se prezintă la transportul lichidelor *în cală*, sau chiar a cerealelor *în vrac*, pe cari un ruliu puternic le poate deplasa. Se obţine o stabilitate suficientă prin separaţiuni sau diafragme longitudinale şi transversale, ceeace dă încărcăturei oarecare rigiditate.

Chestiunea este mai diferită la *docurile plutitoare*, chesoane enorme, pe cari se aşează un vas pentru a fi revizuit sau reparat şi din care se pompează apa, pentru a se ridica şi pune vasul de revizuit la uscat (ele înlocuesc *formele de radub*, cari sunt bazine, în cari se introduce vasul de revizuit, golindu-se de apă prin pompe). Centrul de greutate al sistemului *cheson-vas* este evident deasupra chesonului şi, dacă chesonul ar fi o simplă ladă dreptunghiulară, golirea apei nu s'ar putea face fără răsturnarea sistemului.

Compartimentarea nu mai este suficientă în acest caz şi s'a ajuns astăzi la soluţia de a se adăuga lateral la chesonul principal două alte părţi, cari măresc stabilitatea de formă (Fig. 127) şi care se calculează astfel ca echilibrul să rămână stabil, ori care ar fi nivelul plutirei.

Forma carenei vasului de revizuit intervine numai, cât timp el n'a fost pus la uscat.

Avantajele docului plutitor sunt: se evită basinele costisitoare; apa ce se pompează corespunde strict deplasamentului vasului; docul poate primi vase mai mari ca tonaj de cât vasul pentru care a fost construit, putându-se uşor mări prin adăugarea de secţiuni suplimentare; se execută mai repede şi se pune mai repede la uscat; în fine, costă circa 30% mai puţin ca o formă de radub.

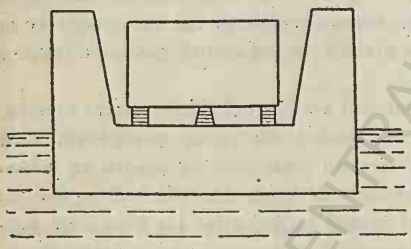


Fig. 127

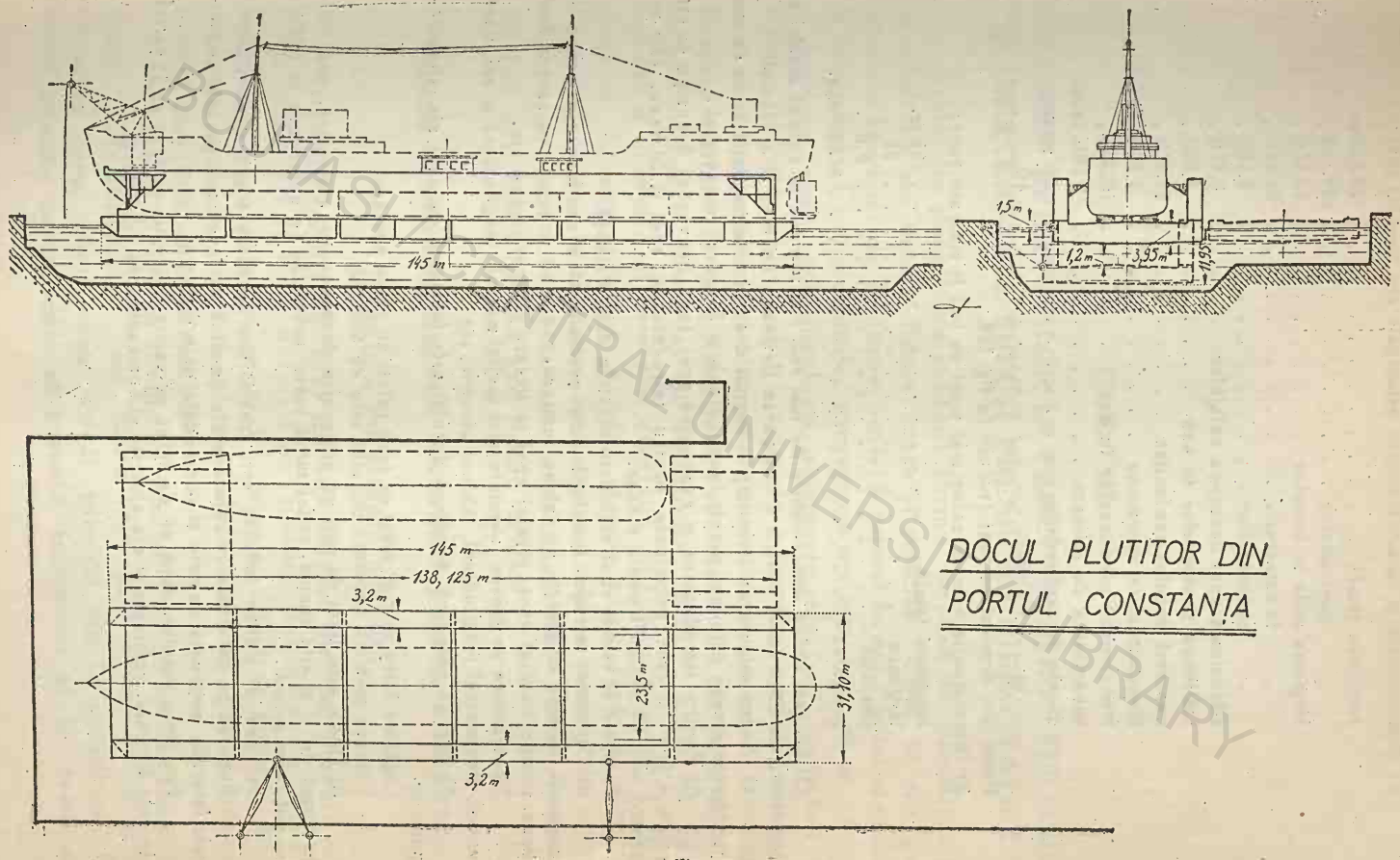
Inconveniente sunt: soluţia nu se poate aplica de cât în apă liniştită; are nevoie de un pescaj (adâncime de cufundare) aproape dublu (căci docul trebue plasat sub vas); operaţia punerei la uscat este delicată; trebue ţinut seamă de cheltuelile de amortizare ale investiţiilor, cari nu au durata unei zidării; docurile se folosesc în marile porturi de râu şi, dacă devine necesar a se construi un bazin special cu apă liniştită, este mai economic a se face un bazin de radub, cheltuelile cu pomparea fiind mai mici ca dobânda investiţiilor.

Mai este de notat că construcţia docurilor nu este uşoară, vasul trebue să se rezeme pe partea de sus a docului prin chilă în mod uniform, ceea ce cere o grijă specială la stabilirea proptelelor, cari transmit greutatea asupra docului, acesta suportând pe cealaltă parte presiunea uniformă a apei.

Notă asupra docului plutitor din portul CONSTANŢA.

1) Docul plutitor din portul *Constanţa* a fost construit de către şantierele *Lübecker Flender Werke*, din *Lübeck, Germania*, în anii 1937—1938.

El este cu secţiunea transversală în formă de *U*, tip autocarenabil, cu corpul flotant longitudinal, format din şase pontoane, şi cu chesoane laterale continue având un modul de rezistenţă $W = 3300000\ cm^3$.



DOCUL PLUTITOR DIN PORTUL CONSTANȚA

Fig. 128

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2) Dimensiunile şi caracteristicele principale ale docului sunt:

lungimea totală	145,000 m
„ pontoanelor	138,125 „
lărgimea utilă în interior	23,500 „
„ în exterior	31,100 „
„ chesoanelor	3,200 „
adâncimea apei deasupra calajelor	6,800 „
înălţimea pontoanelor în axă	3,950 „
pescajul docului scufundat	11,950 „
francbordul în imersiune	1,500 „
francbordul pontoanelor în axă	0,300 „
capacitatea de ridicare	8 000 tone
durata de scufundare	35 minute
„ „ ridicare	40 „

Parte din dimensiuni sunt trecute în fig. 128.

3) Dimensiunile vaselor celor mai mari ce pot fi ridicate sunt:

lungimea totală	155 m.
lărgimea	22 „
pescajul	6,6 „
greutatea	8000 tone.

Cu un vas, având dimensiunile de mai sus, mai rămâne în corpul docului un lest lichid de 2500 tone, pentru a compensa flexiunea docului şi a vasului.

4) Pentru asigurarea stabilităţii, corpul docului este împărţit în 24 de compartimente etanşe prin trei pereţi longitudinali şi 5 pereţi transversali.

5) Pentru introducerea şi evacuarea apei sunt prevăzute 6 pompe de evacuare a apei, 6 vane principale pentru introducerea apei şi 24 vane, câte una pentru cele 24 compartimente etanşe.

Pompele şi vanele sunt acţionate electric dela distanţă.

6) Comanda întregei instalaţii este centralizată şi se face din cabina de comandă, în care se găseşte un tablou luminos, indicând pompele ce sunt în funcţiune, poziţia fiecărei vane, nivelul apei în fiecare compartiment, etc.

Deasemenea se găsesc montate aici înclinometrul longitudinal şi cel transversal, fleximetrul longitudinal, tabloul electric, etc.

7) Energia electrică necesară docului este furnizată de centrala electrică a portului.

Legătura între doc şi uscat se face printr'un cablu aerian.

Puterea maximă necesară docului este de 500 kw.

8) Docul este fixat de mal cu ajutorul a două ancore articulate, una dublă în formă de V şi alta simplă, astfel încât toate mişcările de cufundare şi ridicare se pot face normal.

9) Vasul ce trebue îndocat este tras în doc de către 4 cabestane electrice.

Punerea pe lin a calelor centrale ale docului se face cu 4 perechi de proptele laterale, acţionate electric şi comandate dela distanţă.

Proptirea vasului, după ce s'a fixat pe calele centrale, se face cu 12 perechi de cale laterale, acţionate şi ele electric şi comandate de la distanţă.

CAP. VIII.

CALCULUL EFORTURILOR ÎN PEREȚI SUBȚIRI, FLEXIBILI ȘI INEXTENSIBILI, SUPUȘI PRESIUNEI HIDROSTATICE.

Astfel de pereți iau evident forma impusă de condițiunile de echilibru ale masei fluide, care îi solicită. Cum ei nu pot desvolta eforturi de flexiune, rezistă numai în sens axial și numai la tracțiune. Compresiunile, presupuse un moment că ar exista, ar produce cute, echilibrul cu asemenea eforturi neputând fi stabil. Pereții rigizi subțiri sau de o grosime relativ redusă, cari se construesc după formele de echilibru ale celor flexibili, lucrează evident în condițiuni mai avantajoase de cât în orice altă formă, întrucât flexiunea și torsiunea lipsesc. Cum ei sunt capabili a desvolta și oarecare eforturi de flexiune, rezistă suficient și la compresiuni axiale, stabil, adică fără a flamba. De aceea teoria de față are aplicațiune atât la pereții de rezervoare tensionați cât și la cei comprimați, de orice material potrivit ca: tablă de fier sau beton armat.

Pânză dreptunghiulară formând perete cilindric.

1. Suprafață cu simplă curbură.

Să considerăm (Fig. 129) un vas format din doi pereți verticali rigizi *AB* și *CD*, normali pe planul figurei și cu laturile inferioare orizontale, în general la nivele diferite, fundul fiind construit dintr'o pânză dreptunghiulară subțire, imponderabilă, perfect flexibilă și inextensibilă.

In presupunerea că lungimea acestui vas, închis la cele două capete, este indefinită, vom căuta care este forma ce va primi pânza în cazul când vasul va fi plin cu apă în echilibru. Se poate admite ca evident, că această formă va fi în orice caz

cilindrică (cu generatoarea orizontală) și independentă de lungimea vasului, astfel că chestiunea se reduce la studiul secțiunei drepte, luată ca plan al figurei.

Este suficient, așa dar, a se găsi forma de echilibru a unei fâșii, cuprinsă între două secțiuni drepte infinit de apropiate și care se poate compara cu un fir flexibil și inextensibil, legat la cele două capete B și D, întrucât eforturile longitudinale opuse, echilibrându-se reciproc, nu intră în considerarea echilibrului din planul figurei. Pentru simplitate, vom lua lățimea acestei fâșii egală cu unitatea.

Este evident că, pentru a avea în pânză numai tensiuni (singurul caz în care echilibrul stabil se poate realiza), forma pânzei trebue să fie *convexă în spre exterior*. Ne vom abține

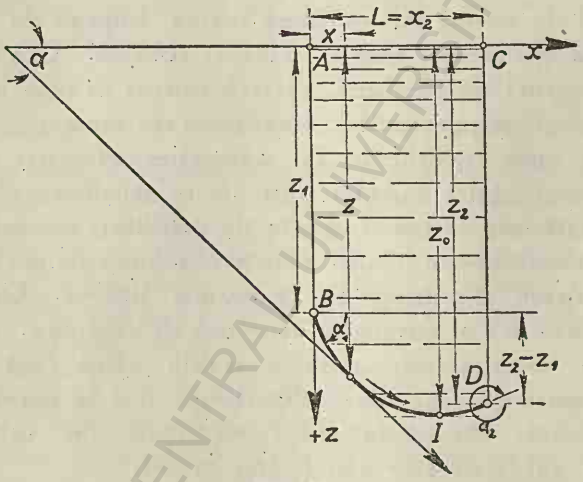


Fig. 129

totuși de a face a priori vre-o ipoteză asupra sensului eforturilor, spre a păstra generalitatea formulelor și pentru cazul pereților subțiri rigizi, unde se pot admite și compresiuni axiale în oarecare măsură.

Să luăm (Fig. 129) ca axă x linia de apă cu sensul pozitiv dela stânga spre dreapta, ca axă $+z$ verticala descendentă AB. Fie ds (Fig. 130) lungimea unui element infinitesimal al perimetrului curbiliniu al secțiunei drepte, s fiind măsurat din spre peretele din stânga către cel din dreapta (în care parcurs lichidul se află *la stânga* lui ds) și α unghiul, față de orizontala $+x$, al tangentei respective, orientată în același sens cu s. Acest unghiu, în cazul figurei, descrește continuu dela B la I și deci $d\alpha$ este negativ.

Presiunea atmosferei, exercitându-se atât pe faţa exterioară a peretelului cât şi pe suprafaţa lichidului, de unde se transmite pe faţa interioară, se elimină din calcul. Presiunea ϖz a lichidului, normală pe ds, este cuprinsă în planul figurei şi echilibrează eforturile desvoltate de restul pânzei asupra elementului considerat în direcţiuni tangenţiale suprafeţei, pe cele patru laturi ale elementului.

Din aceste eforturi, cele în sens normal pe planul figurei se echilibrează mutual, după cum s'a spus, fiind evident egale în toate secţiunile transversale, din cauza condiţiunilor identice în cari acestea se află. Ele vor depinde de presiunile exercitate de

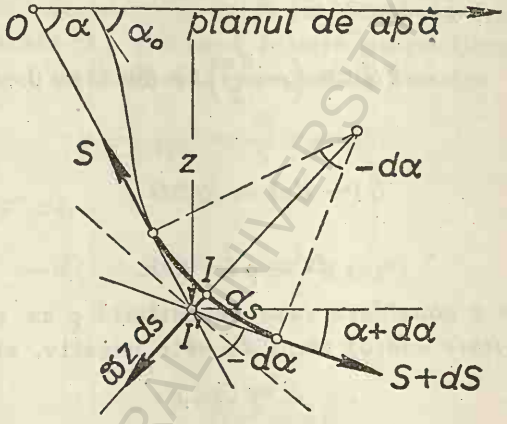


Fig. 130

pereţii transversali, dar le putem lăsa nedeterminate, orice valoare a lor comună de o parte şi de alta a elementului considerat fiind compatibilă cu echilibrul acestuia; astfel d. e. orice forţe de tensiune, egale şi de sens contrar, aplicate, pe lângă cele hidrostatice, în sens longitudinal vasului, pe pereţii transversali, ar modifica în consecinţă eforturile longitudinale din toate secţiunile transvesale, fără a turbura echilibrul pânzei, presupusă suficient de rezistentă.

Fie S valoarea efortului transversal pe unitatea de lăţime, într'un punct oarecare al fundului, funcţie, evident, de s sau de z sau de α, ori care din aceste putând servi ca parametru.

Vom considera ca pozitive tracţiunile (ale căror direcţie şi sens sunt indicate pe figură), urmând ca valorile negative ale lui S să reprezinte compresiuni.

Să scriem ecuaţiile de echilibru ale lui ds în proecţie pe tangentă (sau pe paralela ei, bisectricea unghiului format de tangen-

tele la extremități) și pe normala din mijlocul elementului, privit ca un arc de cerc (al cercului osculator).

Pe prima axă de proecție, presiunea lichidului, îndreptată din cauza micimei lui ds după raza sau normala mijlocie, dă o proecție nulă sau, mai riguros, de un ordin infinitesimal superior, ce se poate neglija; rămân deci proecțiile opuse ale celor două eforturi S și $S+dS$, cari dau:

$$dS = 0.$$

$$S = C\text{-tă}. \qquad (1)$$

Pe axa de proecție normală (de exemplu cu sensul pozitiv în spre exterior) avem:

$$-2S \sin\left(-\frac{d\alpha}{2}\right) + \varpi z\, ds = 0 .$$

sau

$$S(-d\alpha) = \varpi z ds, \qquad (2)$$

și cum

$$ds = \rho(-d\alpha),$$

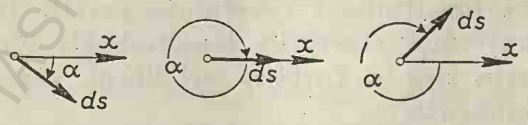
cu condiția de a considera raza de curbură ρ ca pozitivă în cazul figurei (*concavitate udată*) când $d\alpha$ este negativ, vom scrie:

$$S = \varpi z \rho$$

sau

$$\frac{S}{\rho} = \varpi z . \qquad (2')$$

Această ecuație stabilește legătura între S, z și raza de curbură a peretelui, și, întru cât S este constant, este chiar ecuația diferențială a curbei.



$180° > \alpha > 0°$; $0°$ sau $360°$; $360° > \alpha > 180°$

Fig. 131

Așa dar, pentru sensul de curbură considerat în figură S este pozitiv, reprezentând tracțiune.

Să vedem în ce mod formula se poate generaliza și pentru partea fundului, care trece dincolo de punctul cel mai jos I (Fig. 130), în care α, descrescând continuu dela B, se anulează. Cum

din cantitățile ce intră în ecuația (2) numai pentru α avem libertatea a mai face o convenție de semn, va trebui, pentru generalizare, să definim pe α astfel, ca și dincolo de punctul I $d\alpha$ să fie negativ, adică α în descreștere. Pentru aceasta, ducând din origina lui ds o orizontală în sensul $+x$, vom socoti pe α dela această semidreaptă în sensul acelor unui ceasornic până la întâlnirea extremității lui ds. La punctul cel mai de jos I, α astfel socotit va trece brusc dela 0^0 la 360^0.

Dacă am avea o altă formă de perete cu *convexitatea udată* ($d\alpha$ fiind atunci pozitiv în tot lungul curbei), formula (2) nu va putea fi aplicată decât cu condiția, de a considera pentru această formă pe ρ negativ, deoarece S va fi în acest caz compresiune.

Ecuația (2′) arată că ρ și z sunt invers proporționale. Punând în (2′) expresia razei de curbură, ajungem la ecuația

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} = \frac{\varpi}{S} z = kz \qquad (2'')$$

sau, înmulțind cu $z'\,dz$,

$$-d\,(1+z'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,d\,(kz^2)$$

și deci:

$$1+z'^2 = \frac{4}{(kz^2+a)^2}.$$

Dacă am continua integrarea am găsi pe

$$x = f(z)$$

sub forma unei integrale eliptice; de aceea e preferabil să găsim ecuațiile parametrice ale curbei, în care scop vom lua ecuația sub forma (2)

$$-S\,da = \varpi\, z\, ds$$

și vom elimina pe s, ca să obținem pe z în funcție de α.

Grație convenției făcute asupra lui α avem în toate cazurile

$$dz = ds\,\sin\alpha,$$

deci

$$-S\,\sin\alpha\,d\alpha = \varpi\, z\, dz$$

sau

$$2\,S\,(\cos\alpha - \cos\alpha_1) = \varpi\,(z^2 - z_1^2), \qquad (3)$$

ecuația parametrică a lui z.

Luând integrala până la punctul I unde tangenta este orizontală, vom avea:

$$2S(1-\cos\alpha_1)=\varpi(z_a{}^2-z_1{}^2), \tag{3'}$$

iar până la capătul D:

$$2S(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)=\varpi(z_2{}^2-z_1{}^2). \tag{3''}$$

Ca să găsim o relație analoagă pentru x în funcție de α, introducem

$$dx=ds\cos\alpha$$

în (2):

$$-S\cos\alpha\,d\alpha=\varpi z\,dx$$

$$S(\sin\alpha_1-\sin\alpha)=\varpi\int z\,dx. \tag{4}$$

Această ecuație, conținând și pe z, nu este ecuația parametrică a lui x (în funcție numai de α), dar, luată până la D:

$$S(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)=\varpi\int_A^D z\,dx, \tag{4'}$$

dă o relație utilă între cele 2 unghiuri α_1 și α_2, căci membrul al doilea este cunoscut, reprezentând întreaga greutate a lichidului pe unitatea de lungime a vasului.

Putem elimina însă și pe z din ecuația (4), servindu-ne de (3), ecuația parametrică a lui z scrisă explicit

$$z=\sqrt{\frac{2S}{\varpi}(\cos\alpha-\cos\alpha_1)+z_1{}^2},$$

și se obține astfel ecuația parametrică a lui x sub formă diferențială:

$$-S\cos\alpha\,d\alpha=\varpi\sqrt{\frac{2S}{\varpi}(\cos\alpha-\cos\alpha_1)+z_1{}^2}\;dx$$

sau:

$$dx=-\frac{S}{\varpi}\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\frac{2S}{\varpi}(\cos\alpha-\cos\alpha_1)+z_1{}^2}}. \tag{5}$$

Integrarea acestei ecuațiuni (5) se poate face, desvoltând în serie expresia din partea a doua, care împreună cu (3) definește curba căutată BD. Relația (5) dă și pe ds:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$ds = \frac{dx}{\cos\alpha}$$

$$ds = -\frac{S\,d\alpha}{\varpi\sqrt{\frac{2S}{\varpi}(\cos\alpha - \cos\alpha_1) + z_1^2}} \qquad (6)$$

Cu datele iniţiale cari sunt: lărgimea x_2 a vasului, diferenţa de nivel a bazelor pereţilor laterali $z_2 - z_1$, lungimea desvoltată l a fundului (lărgimea pânzei) şi greutatea lichidului, adică valoarea integralei din (4'), cele 4 cantităţi α_1, α_2, z_1 şi constanta S rezultă din relaţiile (3''), (4') şi ecuaţiile (5) şi (6), integrate între B şi D. In rezumat, cele două ecuaţii de proecţie pe normala şi tangenta la curbă, împreună cu condiţiile iniţiale, determină pe de o parte valoarea lui S, iar pe de altă parte forma curbei.

2. Suprafeţe de pereţi cu dublă curbură.

Să luăm acum un perete infinit de subţire, flexibil şi inextensibil de o formă oarecare.

Putem să ne închipuim această suprafaţă împărţită în elemente infinitezimale prin două serii de linii ortogonale s şi s', de

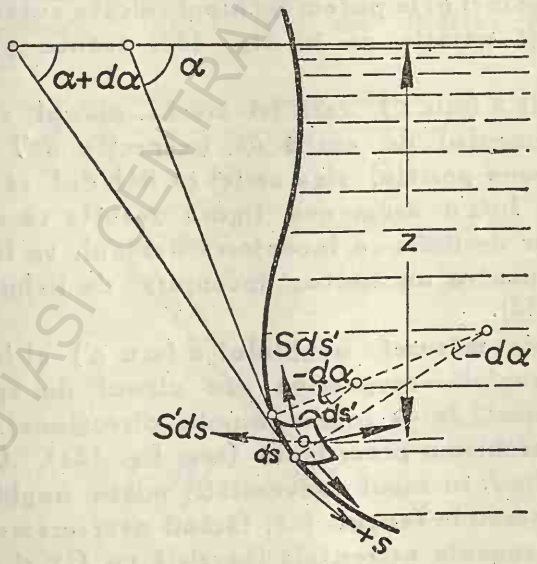


Fig. 132

exemplu *liniile de curbură*, fiecare element fiind solicitat de eforturi tangenţiale, perpendiculare pe cele patru laturi.

Fie S și S' eforturile pe unitatea de lungime, exercitate respectiv pe laturile ds' și ds ale unui asemenea dreptunghiu curbiliniu (accentul depe eforturi se referă la *direcție*, adică S' este efortul în direcția s', deci perpendicular pe s).

Presiunea hidrostatică, exercitată normal pe acest element (după normala mijlocie), va fi echilibrată, în presupunerea că pe el nu avem nici o reacțiune de reazem, prin rezultanta eforturilor exercitate pe cele patru laturi.

Oricare ar fi sistemul de curbe trasate, din cari fac parte arcurile infinitesimale adiacente ds și ds', ducem prin acestea planurile normale pe suprafață, adică trecând fiecare și prin normala la suprafață într'un punct al arcului infinitesimal respectiv, d. e. în punctul unde se întâlnesc ds și ds'.

Să luăm pentru secțiunile suprafeței prin aceste două planuri ortogonale, centrele respective de curbură, la intretăierea normalelor duse la extremitățile lui ds și ds' ale curbelor în planurile menționate.

Pentru a ajunge la formule cât mai generale, vom generaliza conveniile, făcute pentru sensuri și semne în problema precedentă.

Fie α și α' unghiurile formate de tangentele după ds și ds' cu urmele orizontale din planul de apă, ale planurilor normale menționate (pe cari ni le putem închipui culcate succesiv pe figură), cu arătarea și natația ca în fig. 132, facute pentru elementul ds.

Unei linii s (sau s'), cari își are în planul astfel rabătut, cel puțin elementul de curbă ds (respectiv ds') considerat, îi atribuim un sens pozitiv, ales astfel ca lichidul să fie la stânga numitei linii. Intr'o asemenea figură rezultă că sensul general al unui contur de linie, ce înconjoară lichidul, va fi sensul trigonometric, iar pentru un contur înconjurat de lichid, va fi sensul invers (Fig. 133).

In privința măsurei unghiului α (sau α') al lui ds (sau ds') cu urma orizontală respectivă din planul de apă (presupusă eventual aruncată la ∞ într'o anumită direcțiune), convenim a-o socoti ca în problema precedentă (vezi fig. 131). Grație acestor două conveniuni, în cazul convexității udate unghiul menționat va descrește mereu în sensul $+s$, făcând necesaremente un salt în punctele cu tangenta orizontală (paralelă cu Ox și având aceeași orientare cu $\vec{Ox}$) a curbei, dela 0 la 2π, respectiv dela 2π la 0.

Dacă convenim concomitent, ca și la problema precedentă,

a considera pe ρ *pozitiv* în cazul *concavităţei* şi *negativ* în acela al *convexităţei udate*, vom putea scrie în mod valabil pentru toate cazurile:

$$ds = -\rho\, d\alpha$$

şi

$$ds' = -\rho'\, d\alpha'.$$

Ecuaţiunile de echilibru, în număr de trei, se obţin proiectând (Fig. 134) forţele pe trei axe, de exemplu pe tangentele T

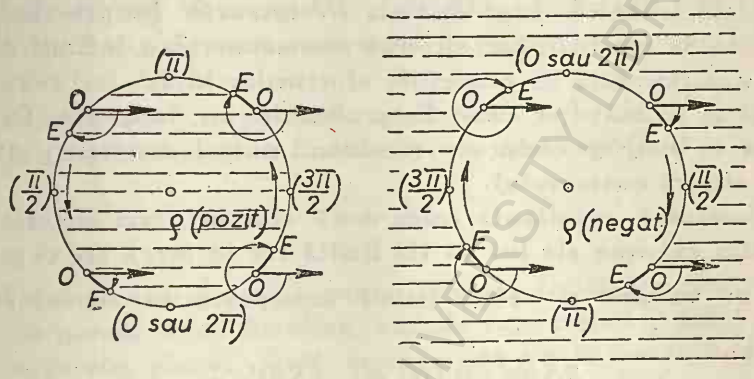


Fig. 133

şi T' în I (centrul elementului) după direcţiunile ds şi ds' şi pe normala exterioară N din I, care are direcţia presiunei lichidului $\varpi z\, ds\, ds'$.

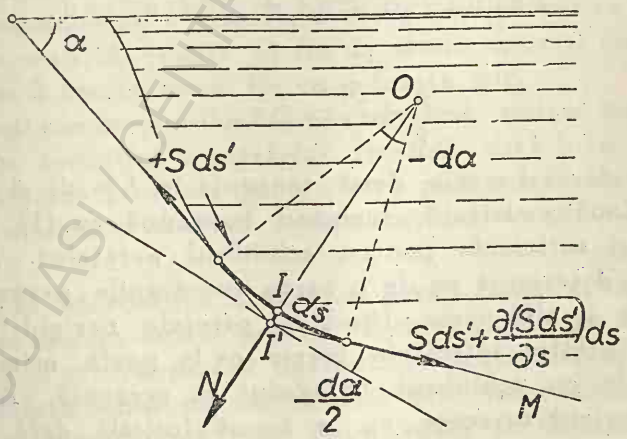


Fig. 134

Pentru eforturi păstrăm deasemenea convenţia de semn, făcută anterior.

Cum z nu poate fi negativ, la generalitatea formulelor trebue făcută restricțiunea ca, în regiunile nemuiate, unde nu se exercită presiunea hidrostatică, adică deasupra planului de apă, să luăm $z = 0$, pentru a avea presiunea $\varpi z = 0$.

Cele două perechi de eforturi cu valorile scalare $S\,ds'$ și $S\,ds' + \frac{\partial (S\,ds')}{\partial s}\,ds$, pe deoaparte, și $S'ds$ și $S'ds + \frac{\partial (S'ds)}{\partial s}\,ds'$ pe de altă parte, dau câte o rezultantă în planul normal respectiv, îndreptată, la limită, după direcția $\vec{N}$, întrucât în proecția pe $\vec{N}$ creșterile de eforturi, cari produc nesimetrie, dau infiniți mici de ordin superior față de proecțiile eforturilor însăși, cari sunt simetrice și se adună (pe când la proiecțiile pe tangentă eforturile acestea se distrug reciproc, rămânând numai creșterile, cari trebuesc atunci conservate).

Bunăoară rezultanta celor două eforturi, cari lucrează după direcțiile extreme ale lui ds (la limită arc de cerc), are ca proecție pe $\vec{N}$ în valoare și semn (fiind îndreptată în sensul contrar lui $\vec{N}$):

$$2\,S\,ds'\cos(NI'M) = S\,ds'\,d\alpha$$

analog ca în problema precedentă. Rezultanta celorlalte două eforturi se obține schimbând accentuarea: $S'\,ds\,d\alpha'$, astfel că ecuația după $\vec{N}$ va fi

$$S\,ds'\,d\alpha + S'\,ds\,d\alpha' + \varpi z\,ds\,ds' = 0,$$

sau

$$\frac{S}{\rho} + \frac{S'}{\rho'} = \varpi z. \qquad (1)$$

Proectarea pe cele două tangente în I la ds și ds' conduce la alte două ecuațiuni, formând împreună cu (1) condițiunile necesare și suficiente pentru echilibrul peretelui. Aceste trei ecuațiuni determină pe de o parte funcțiunile necunoscute S și S', iar pe de altă parte, fiind dat peretele nerigid (deformabil), îi impun printre infinitele forme ce le poate primi, pe aceea compatibilă cu echilibrul lichidului în prezență. Așa dar, un perete nerigid oarecare, cu o formă inițială dată (vezi cazul precedent cu peretele de fund presupus dat neîntins), se va deforma pentru a se adapta cerințelor acestui echilibru.

Cele două ecuațiuni după tangente depind evident de natura curbelor ortogonale s și s'. Proectarea forțelor se poate face mai

întâiu pe planul tangent, obţinându-se vectori *echivalenţi* (adică diferind de primii cu infiniţi mici de ordin superior), şi de aci apoi pe fiecare din tangente (presiunea lichidului va da evident o proecţie nulă). Cele două perechi de eforturi opuse, dau câte o rezultantă care, deşi infinitesimală faţă de fiecare din ele, nu se poate neglija în proecţie pe tangente, fiind de primul ordin de mărime al cantităţilor ce rămân în ecuaţie. Pentru a afla aceste rezultante (sau creşterile vectoriale ale eforturilor), cari intervin în calcul, trebue să cunoaştem definiţia geometrică sau analitică a curbelor s şi s', ceeace este cazul de exemplu la suprafeţele de rotaţie.

Ecuaţia (1), în punctele unde d. e. ρ' ar fi ∞ (suprafaţă cu o singură curbură), devine ca şi în prima problemă

$$\frac{S}{\rho} = \varpi z .$$

După aceeaşi ecuaţie, pentru valori finite ale eforturilor S şi S' nu putem avea simultan ambele raze infinite, adică suprafaţă de perete plană, decât acolo unde $z = 0$, iar dacă avem în vre-un punct ambele raze foarte mari (o suprafaţă aproximativ plană) şi $z \neq 0$, trebue ca unul cel puţin din eforturi să fie foarte mare, astfel ca suma din primul membru să dea cantitatea finită ϖz.

In punctele unde una din raze, de exemplu ρ', este nulă, ceeace corespunde cu o muchie, aceasta implică sau ca şi S' să fie nul sau ca cealaltă fracţie să fie de semn opus şi foarte mare, adică fie cu S foarte mare, fie cu ρ foarte mic.

In cazul compresiunilor ieşite din calcul, putem realiza forma de echilibru teoretică a peretelui flexibil, dacă luăm un perete rigid de oarecare grosime, pentru a se putea desvolta cupluri de flexiune suficiente, cari să reziste micilor tendinţe de deformaţiune.

Calculul eforturilor la vase cu pereţi rigizi, relativ subţiri, cari evident convin numai pentru eforturi axiale, se face în acelaşi mod ca şi pentru pereţii flexibili. Se poate întradevăr împrumuta rigiditate unui perete flexibil prin introducere la fiecare moleculă eforturi, două câte două egale şi de sens contrar, capabile de a desvolta la novoe cupluri de flexiune. Ori, această introducere nu schimbă cu nimic condiţiunile de echilibru şi repartiţia eforturilor.

3. Suprafeţe de pereţi în forme de rotaţie *)

In practică se dă deobiceiu vaselor cu pereţi rigizi subţiri, destinate a primi lichide sau a rămâne cufundate în lichide, forme de rotaţie cu axa verticală z. Aceste forme, compatibile cu presiunea hidrostatică atunci când pereţii sunt nerigizi, sunt preferate şi în cazul pereţilor rigizi, pentru a avea o solicitare mai favorabilă a materiei (în sensul arătat mai sus, adică eforturi teoretic axiale, necesitând, în comparaţie cu cazul când ar exista flexiune, grosimea minimă).

Cazul unui perete de asemenea formă se poate studia mai uşor din cauza simetriei în jurul axei, care face ca una din cele trei ecuaţiuni, arătate mai sus, să fie satisfăcută dela sine. Rămân astfel numai două ecuaţii, necesare şi suficiente pentru calculul eforturilor S şi S', fără altă condiţie impusă formei. Aşa dar, o formă de rotaţie a unui vas plin cu lichid sau cufundat în el este o formă de chilibru stabil, *totdeauna* în caz de tensiuni şi *numai pentru pereţi rigizi* în caz de compresiuni.

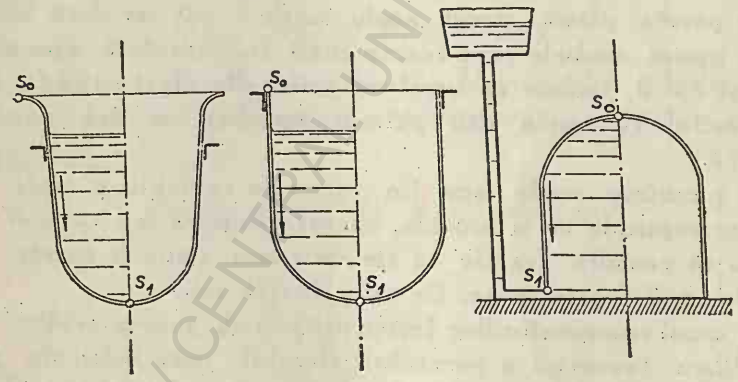


Fig. 135

Dimensionarea acestor pereţi făcându-se exclusiv după efortul de tensiune sau compresiune, dat de calcul, este redusă astfel la minimum.

Rezervoarele în formă de rotaţie *reazămă* sau *sunt suspendate* prin intermediul unui *cerc de reazăm orizontal*, care dă reacţiuni uniform repartizate de-a-lungul unui paralel al peretelui. Ele mai pot rezema pe un plan orizontal, corespunzând cu un paralel al formei de rotaţie. Reazămul rigid poate lipsi dacă e vorba de un perete plutitor.

*) Vezi: „*Bul. Soc. Politechnice*, anul XXXII Nr. 1 şi 2.

Să luăm o suprafaţă oarecare de această formă, reprezentată pe figură prin semi-meridiana din stânga axei. In general această semi-meridiană este o curbă deschisă, adică cu două capete, din care unul cel puţin corespunde paralelului de margine (unde uneori se aşează şi cercul de reazăm), altul fiind în general pe axa de rotaţie. Pe o asemenea suprafaţă, trasând orice paralel, altul decât cel de reazăm, peretele vasului se desparte în două părţi, din care una va conţine cercul sau planul de reazăm (după cazuri), iar alta va fi liberă de reazeme. Capătul semi-meridianei din această din urmă parte va fi, conform celor menţionate mai sus, ori pe axă ori pe marginea liberă a vasului (în vid, aer sau apă),

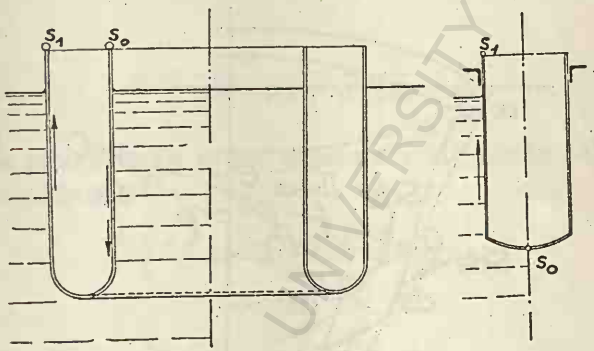


Fig. 136

unde peretele nu lucrează, întrucât nu e supus decât cel mult la presiuni atmosferice sau hidrostatice, egale de o parte şi de alta. Pentru această parte de perete (lipsită de reazeme), problema se prezintă mai simplu.

Vom stabili formulele referindu-ne la semi-meridiana din stânga, care defineşte complet suprafaţa de rotaţie, adoptând aceleaşi convenţiuni ca mai sus. După sensul convenit pentru parcurgerea liniilor de perete udat (lăsând lichidul la stânga), vom distinge, printre cele două capete ale meridianei, origina s_0 şi extremitatea s_1.

Figurile 136 şi 137 reprezintă vase îndeplinind condiţiunile arătate.

Pentru uşurinţa vorbirei, vom numi (urmărind sensul meridianei) partea peretelui dela s_0 la reazăm *exterioară*, iar partea dela reazăm la s_1 *interioară reazemelor* (cu refe-

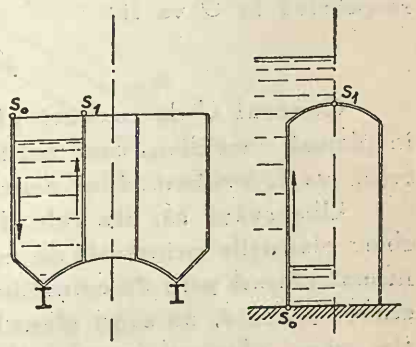


Fig. 137

rință la formele mai obișnuite din primele figuri). Orice parte exterioară sau interioară reazemelor este *rezemată* sau *suspendată*, după cum se află de partea reazemelor, în spre cari sunt îndreptate reacțiunile acestora, sau de partea opusă. Această distincțiune nu are importanță pentru calcul.

Fie (fig. 138 in perspectivă) un element de suprafață infinitesimal, limitat de două meridiane și de doi paraleli. Fie ds una din cele două laturi *meridiane*, egale prin simetrie, făcând cu planul de apă unghiul α, și ds' latura *paralelă* (prima în sensul $+s$) formând cu ds în O un unghiu drept. Dacă prin ds' ducem planul normal la suprafață și în el normalele la extremitățile lui ds', în scop de a afla centrul de curbură respectiv, aceste normale se vor întâlni pe axă în C', deci raza de curbură respectivă în O va fi:

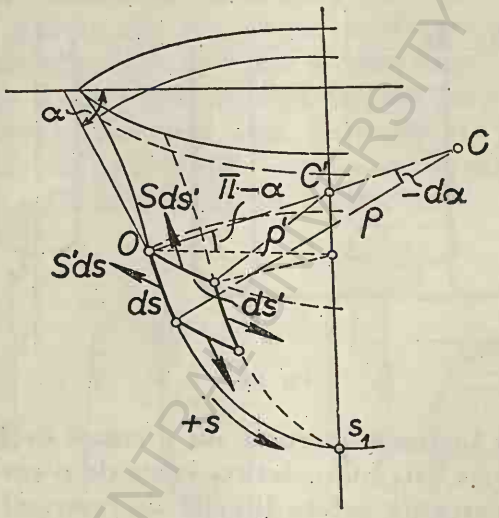


Fig. 138

$$\rho' = OC'.$$

Centrul C de curbură al suprafeței, tot în punctul O, însă în planul meridian, care totdeauna este un plan normal suprafeței, va fi evident chiar centrul de curbură al meridianei.

Observăm că, din cele două planuri menționate, cari sunt chiar planurile principale de curbură în O ale suprafeței de rotație, numai planul prin ds coincide cu planul osculator, însuși planul curbei plane s, pe când planul prin ds' conține numai două puncte ale curbei plane s' (paralelul).

Din figură se vede că:

$$\rho' = \frac{r}{\sin \alpha}$$

şi

$$\rho = \frac{ds}{-d\alpha}$$

şi cum

$$-\frac{dr}{ds} = \cos \alpha$$

rezultă:

$$\rho = \frac{dr}{\cos \alpha \, d\alpha} = \frac{dr}{d(\sin \alpha)}.$$

Ecuaţia generală în proecţie pe normală poate primi, aşa dar, şi forma mai practică:

$$\frac{S' \sin \alpha}{r} + \frac{S\, d(\sin \alpha)}{dr} = \varpi z, \qquad (1)$$

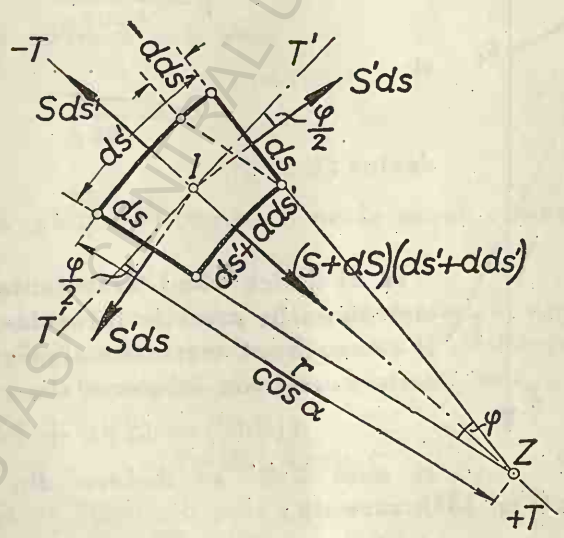


Fig. 139

în care S' este efortul *inelar*, adică cel exercitat în direcţia unui paralel (perpendicular pe meridian), iar S efortul *meridian*, exercitat în direcţia meridianei (perpendicular pe paralel).

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru proectarea pe tangente, putem, cu neglijarea unor infinit mici de ordin superior, înlocui toate eforturile prin proecțiile lor (Fig. 139) pe planul tangent în I, centrul elementului, Z fiind urma axei verticale de rotație. Să proectăm la rândul lor aceste proecții mai întâiu pe tangenta la paralel $T'T'$; eforturile meridiane, fiind perpendiculare pe acesta, dau 0, ceeace arată că, pentru echilibru, eforturile inelare trebue să fie egale și direct opuse; de aci și din egalitatea laturilor opuse ds rezultă și egalitatea efortului unitar, adică constanța lui S', dealungul unui paralel:

$$\frac{\partial S'}{\partial s} = 0, \qquad (2)$$

ceeace este o consecință a simetriei sistemului în jurul axei z.

In proecție (Fig. 139 și 140) pe tangenta meridiană TT, cu același sens pozitiv ca s, obținem mai întâu în mărime și semn (numind φ unghiul infinitesimal cu vârful în Z) rezultanta celor două eforturi inelare egale: $S'ds\,\varphi$, care, înlocuind,

$$\rho = \frac{ds'}{r/\cos\alpha}$$

și

$$ds = \frac{-dr}{\cos\alpha}$$

devine:

$$-S'ds'\frac{dr}{r}.$$

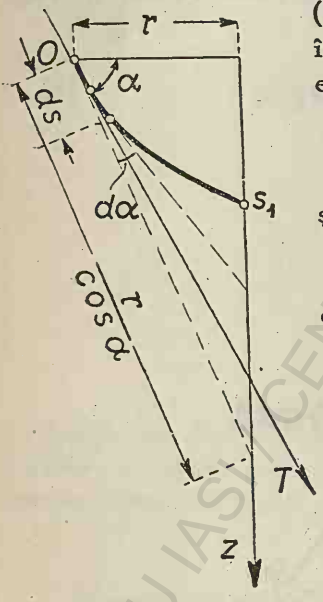


Fig. 140

In al doilea rând rezultanta eforturilor meridiane în proecție intervine, în mărime și semn, drept creșterea algebrică a lui Sds', corespunzătoare creșterei ds,

$$d(S\,ds') = dS\,ds' + S\,d\,ds'$$

și cum $d\,ds'$ se deduce din asemănarea triunghiurilor (Fig. 137), care dă:

$$\frac{-d\,ds'}{ds'} = \frac{ds}{r/\cos\alpha} = \frac{-dr}{r},$$

rezultă ecuația de echilibru după TT:

$$dS\,ds' + \frac{S\,ds'\,dr}{r} - \frac{S'ds'dr}{r} = 0,$$

sau

$$\frac{dS}{dr} = \frac{S' - S}{r}$$

sau

$$\frac{d(Sr)}{dr} = S'. \qquad (3)$$

In părţile unde în mod curent $S' = 0$, avem $Sr = constant$, adică S invers proporţional cu raza cercului paralel şi viceversa.

Pentru a găsi pe S, eliminând pe S' cu ajutorul ecuaţiunei (1), obţinem

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d(Sr)\sin\alpha}{dr} + \frac{S\, d(\sin\alpha)}{dr} = \varpi z,$$

sau

$$d(S r \sin\alpha) = \varpi z r\, dr.$$

In regiunea unde nu este lichid, adică deasupra planului de apă, trebuind a lua $z = 0$ după cum s'a explicat mai sus, vom avea,

$$S r \sin\alpha = const.$$

Dacă α nu se schimbă vom avea

$$Sr = const$$

şi după (3)

$$S' = 0.$$

Cădem astfel, pentru α constant, peste cazul examinat mai sus

$$S' = 0,$$

care vedem acum că se realizează în regiunea neudată a peretelui ($z = 0$), însă numai pentru α constant dealungul meridianei, adică la o suprafaţă conică. In acea regiune, dacă α este variabil, avem numai

$$S r \sin\alpha = const,$$

fără a avea şi Sr constant, ceea ce conduce la

$$S' \neq 0,$$

afară de cazul când şi S ar fi nul (pereţi, exteriori reazemelor, în aer).

Având în vedere că ultima ecuaţie diferenţială trebue integrată fie dela s_0 la I, fie dela s_1 la I, vom prefera a face integrarea pe partea care nu cuprinde reazeme, pentru a nu fi nevoie

BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

să ținem seama de reacțiunile acestora. Așa dar, dacă punctul I se găsește pe partea *exterioară* reazemelor (aceea cu s_0) vom integra dela s_0 la I, iar dacă se găsește pe partea *interioară* (aceea cu s_1) vom integra dela s_1 la I.

Cum pentru partea semi-meridianei lipsită de reazăm, capătul respectiv s_0 sau s_1 se află fie la marginea vasului (cu $S = 0$), fie pe axă ($r = 0$), limita inferioară a integralei din primul membru va fi nulă și vom scrie în mod general:

$$S r \sin \alpha = \varpi \int_{s_0 \text{ sau } s_1}^{I} z r \, dr , \qquad (3')$$

integrala din membrul al doilea înțelegându-se *pe partea liberă de reazeme.*

Inmulțind cu 2π vedem că membrul al doilea, ca valoare absolută, exprimă, în greutate de coloană de lichid, presiunea totală verticală exercitată pe partea liberă de reazăm a peretelui (exterioară sau interioară), limitată de paralelul ce trece prin I.

Ecuația, astfel înmulțită cu 2π, se putea obține mai repede, exprimând, în fiecare caz particular, echilibrul, în proecție pe axa z, al părții peretelui lipsită de reazăm, despărțită prin paralelul I, în care caz intervine evident presiunea totală verticală în chestiune și eforturile S pe conturul acelui paralel. Dacă am fi procedat însă de la început în modul acesta, n'am fi putut folosi convențiile făcute pentru semne și pentru măsurarea unghiului α, în scop de a obține pe S *în mărime și semn* printr'o *formulă generală*, fără a ne preocupa de împrejurările în cari se prezintă vasul (vezi fig. 135, 136, 137).

In rezumat, cele două ecuațiuni fundamentale pentru calculul eforturilor S și S' la vase cu pereți subțiri *în formă de rotație*, supuși presiunei hidrostatice, sunt:

$$\frac{S}{\rho} + \frac{S'}{\rho'} = \varpi z$$

sau

$$\frac{S' \sin \alpha}{r} + \frac{S \, d(\sin \alpha)}{dr} = \varpi z , \qquad (I)$$

prima formă de ecuație fiind mai generală, întrucât se aplică la orice formă de perete, a doua fiind specială pereților în formă de rotație și, pentru acest caz, mai practică în aplicațiune, și:

$$S r \sin \alpha = \varpi \int_{s_0 \text{ sau } s_1}^{I} z r \, dr , \qquad (II)$$

care trebue aplicată pe partea liberă de reazeme.

Din aceste ecuaţiuni se deduc uşor formulele aplicabile la diferite forme uzuale cu meridiane drepte, curbe sau mixte, toate compatibile cu echilibrul.

Ecuaţiile de mai sus se pot aplica şi în cazul unui fluid elastic (în care caz vasul va fi natural închis şi ambele capete s_0 şi s_1 se vor găsi pe axă), înlocuind pe ϖz prin p, presiunea fluidului pe unitate de suprafaţă, care *practic* este constantă pe toată suprafaţa peretelui.

Vom avea în acest caz:

$$\frac{S'}{\rho'}+\frac{S}{\rho}=p$$

sau

$$\frac{S'\sin\alpha}{r}+\frac{S\,d(\sin\alpha)}{dr}=p \qquad (I')$$

şi

$$S\,r\sin\alpha=p\int_{s_0\ sau\ s_1}^{I} r\,dr. \qquad (II')$$

In cazul fluidelor elastice, dacă neglijăm pe ϖ care este mic şi facem abstracţie şi de greutatea proprie a vasului (după cum s'a procedat de altfel în tot calculul de faţă), reazemele devin inutile şi nu mai intră în consideraţie la integrarea menţionată. In realitate greutatea proprie nu se poate totdeauna neglija şi de aceea, în practică, acolo unde este necesar, se ţine seamă de greutatea pereţilor.

Notă. Am găsit pentru orice formă de suprafaţă de rotaţie, deci fără restricţie pentru această formă, în cazul lichidelor:

$$\frac{S'\sin\alpha}{r}+\frac{S\,d(\sin\alpha)}{dr}=\varpi z \qquad (I)$$

şi

$$S\,r\sin\alpha=\varpi\int z\,r\,dr, \qquad (II)$$

cari dau pe S şi S' în ori ce punct al suprafeţei.

Dacă punem condiţia ca efortul S să fie constant dealungul meridianei adică pentru toate valorile lui r (şi deci pe întreaga suprafaţă), ecuaţia (3) dă,

$$S=S'.$$

Aşa dar, al doilea efort va fi şi el constant şi egal cu cel dintâiu pe toată întinderea suprafeţei, iar (I) şi (II) devin identice.

Dacă impunem problemei această condiţie, vom avea o singură ecuaţiune dinstinctă şi o singură necunoscută S.

Condiţa însă $S = S' = const.$ devine o condiţie restrictivă pentru forma suprafeţei de rotaţie, care nu mai poate fi arbitrară.

O astfel de formă de rotaţie particulară este şi aceea primită, în virtutea capilarităţii, de suprafaţa unui lichid în vid sau în contact cu un alt fluid, suprafaţă la care, precum se ştie, forţele capilare pot fi înlocuite prin aşa numita *tensiune superficială*, care, fiind constantă şi cunoscută pentru fie care caz special, impune suprafeţei forma particulară în chestiune (vezi capitolul următor).

Aplicaţia Nr. 45. A se calcula eforturile la un rezervor cu pereţi cilindrici în diferite moduri de fixare.

Răspuns: La oricare din cele *4* regiuni de puncte: *1*, *2*, *3* şi *4* din figurile 141 avem după (I):

$$\frac{S' \sin \alpha}{R} = \varpi z,$$

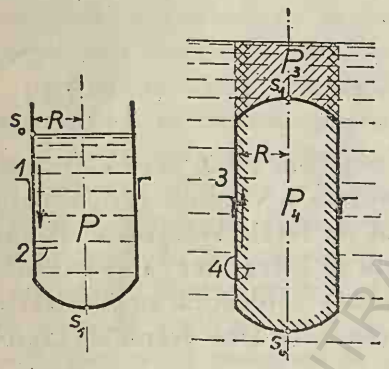


Fig. 141

care, după valoarea convenită a lui α, dă:

$$S'_1 = \varpi Rz \quad \text{în cazul (1)},$$

$$S'_2 = \varpi Rz \quad \text{„ „ (2)},$$

$$S'_3 = -\varpi Rz \quad \text{„ „ (3)},$$

$$S'_4 = -\varpi Rz \quad \text{„ „ (4)}.$$

Aşa dar, S' creşte în valoare absolută proporţional cu adâncimea, fiind *0* pentru $z = 0$ în dreptul planului de apă, în sus de care rămâne deasemenea nul.

După (II) avem:

$$SR \sin \alpha = \varpi \int_{s_0 \text{ sau } s_1}^{R} z\, r\, dr$$

care, după valoarea lui α şi poziţia reazemelor, dă:

$S_1 = 0$ pentru cilindrul plin rezemat din cazul (1),

$S_2 = \dfrac{P}{2\pi R}$ pentru cilintrul plin suspendat din cazul (2),

$S_3 = -\dfrac{P_3}{2\pi R}$ pentru cilindrul cufundat, fixat în partea de jos din cazul (3),

$S_4 = -\dfrac{P_4}{2\pi R}$ pentru cilindrul cufundat, fixat în partea de sus din cazul (4)

unde P este greutatea lichidului conţinut, care apasă pe fundul primului rezervor, P_3 şi P_4 presiunile exercitate pe fundurile vasului al doilea, toate în valoare absolută.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se vede că S este constant de aceeași parte a cercului de reazem. Diferența lui $2\pi RS$ de o parte și de alta este egală cu greutatea conținutului, respectiv a capacității în lichid a vasului (carena). Valoarea absolută mai mare se găsește totdeauna sub reazeme.

Aplicația Nr. 46. A se calcula eforturile în vase cu pereți conici în diferite moduri de fixare.

Răspuns: Cazurile ce se pot întâlni la suprafețele conice se pot rezuma în următoarele 4 figuri, cari cuprind fiecare câte două cazuri: deoparte a reazemelor conul complet (indice *c*) și de cealaltă parte conul trunchiat (indice *t*), caracteristica principală a acestor suprafețe fiind totuși de a fi *exterioare* (*e*) sau *interioare* (*i*) *reazimelor*, conform convenției făcute. Figurile sunt aranjate în ordinea crescândă a lui α_0

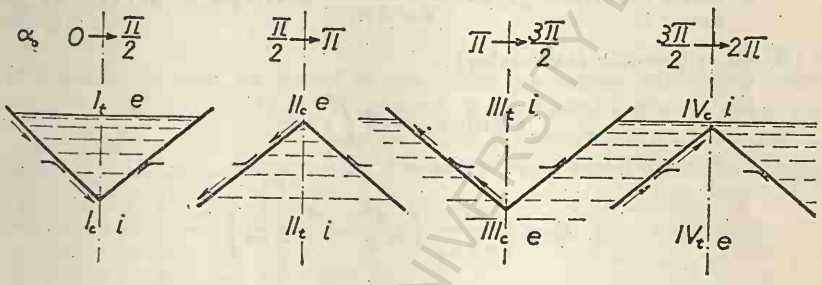


Fig. 142

Primele două figuri corespund suprafețelor conice cu vârful (real sau fictiv) în jos și în sus, udate pe partea concavă; ultimele două figuri corespund aceloraș suprafețe, udate pe partea convexă.

Vom discuta numai cazurile cele mai obișnuite din figură și anume suprafețele conice cu vârful (real sau fictiv) în jos, udat pe partea concavă. Formulele fiind generale se pot ușor aplica și la celalte cazuri.

1) *Con cu vârful în jos, udat pe partea concavă și interior reazemelor.* Conul acesta este suspendat. Avem:

$$\frac{S' \sin \alpha_0}{r} = \varpi z \qquad (I)$$

cu α_0 constant.

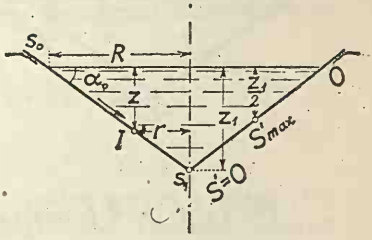


Fig. 143

Dacă z_1 este ordonata vârfului s_1, avem:

$$z = z_1 - r \operatorname{tg} \alpha_0$$

și putem exprima totul în funcție de parametrul r:

$$S' = \varpi r \frac{(z_1 - r \operatorname{tg} \alpha_0)}{\sin \alpha_0} = \varpi r \left(\frac{z_1}{\sin \alpha_0} - \frac{r}{\cos \alpha_0} \right).$$

Efortul este tensiune, căci $r < z_1 \operatorname{cotg} \alpha_0$, adică $r < R$. La suprafața liberă și deasupra ei, unde trebue socotit $z = 0$, S' este nul (tensiune nulă).

Avem deci totdeauna S' tensiune. Discuţia cu ajutorul derivatei:

$$\varpi\left[\frac{z_1}{\sin\alpha_0}-\frac{2r}{\cos\alpha_0}\right],$$

care este pozitivă când $r<\frac{R}{2}$, se rezumă la următorul tablou, care în practică, dacă conul nu se va întinde până la suprafaţa apei, ci formează d. e. fundul unui cilindru, se va limita la cercul lui marginal:

r	0		$\frac{R}{2}$	R	$>R$
$\frac{dS'}{dr}$	$+$	$+$	0	$-$	*nu se aplică*
S' tensiune	0	creşte $S'_{max}=\frac{\varpi z_1^2\cos\alpha_0}{4\sin^2\alpha_0}$		descreşte	0 nul ($z=0$)

Din (II) cu s_0 (interior reazemelor):

$$r S\sin\alpha_0=\varpi\int_0^r z\,r\,dr$$

obţinem:

$$S=\frac{\varpi}{r\sin\alpha_0}\left(z_1\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\operatorname{tg}\alpha_0\right).$$

sau

$$S=\varpi r\left(\frac{z_1}{2\sin\alpha_0}-\frac{r}{3\cos\alpha_0}\right).$$

S este tensiune pentru $r<\frac{3}{2}R$, adică în toată regiunea udată, în care nu se mai aplică formula, dincolo trebuind a socoti $z=0$ şi având $Sr=constant$ (fiindcă $S'=0$). Discuţia cu ajutorul derivatei:

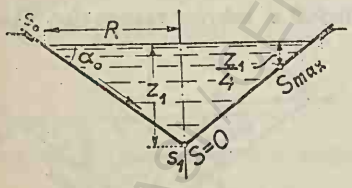


Fig. 144

$$\varpi\left[\frac{z_1}{2\sin\alpha_0}-\frac{2r}{3\cos\alpha_0}\right],$$

care este pozitivă când $r=\frac{3}{4}R$, dă tabloul de mai jos, care se va limita deasemenea la cercul lui de bază, dacă conul nu se întinde până la suprafaţa apei.

Pentru $r>R$ greutatea P a apei conservă constantă valoarea ei:

$$\frac{\pi\varpi z_1^3\operatorname{cotg}^2\alpha_0}{3}$$

dela $r=R$ şi de aceea S, rămânând tensiune, descreşte în raportul:

$$\frac{R}{r}=\frac{z_1\operatorname{cotg}\alpha_0}{r}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se aplică formula	$S=\varpi r\left(\frac{z_1}{2\sin\alpha_0}-\frac{r}{3\cos\alpha_0}\right)$	×	$S=\frac{1}{6}\varpi\frac{z_1^3\cos^2\alpha_0}{r\sin^3\alpha_0}$

r	0		$\frac{3}{4}R$		R	
$\frac{dS}{ds}$	+	+	0	−	−	−
Stensiune	0 crește $S_m=\frac{3}{16}\varpi\frac{z_1^2\cos\alpha_0}{\sin^2\alpha_0}$		descr. $\frac{1}{6}\varpi\frac{z_1^2\cos\alpha_0}{\sin^2\alpha_0}$		descr. inv. pr. cu r.	

Descreșterea dela $\frac{3}{4}R$ la R este relativ mică, coeficienții egalând respectiv $\frac{9}{48}$ și $\frac{8}{48}$.

2) *Trunchiu de con cu vârful în jos, udat pe partea concavă și exterior reazemelor.* Nu e cazul a discuta decât pe S, unde ca limită inferioară pentru r avem R la s_0.

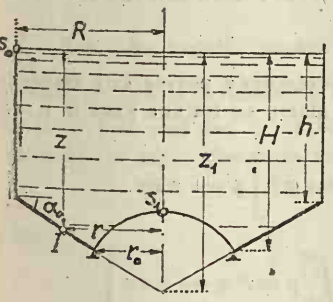


Fig. 145

Fie și aci z_1 la vârful conului. Ecuația

$$S\,r\sin\alpha=\int_R^r z\,r\,dr,$$

dă

$$S=-\frac{\varpi}{r}\left[\frac{z_1(R^2-r^2)}{2\sin\alpha_0}-\frac{R^3-r^3}{3\cos\alpha_0}\right]$$

și înlocuind:

$$z_1=h+R\,tg\,\alpha_0:$$

$$S=-\frac{\varpi}{2r\sin\alpha_0}\left[(R^2-r^2)\,h+(R-r)^2\,\frac{R+2r}{3}\,tg\,\alpha_0\right].$$

Avem deci numai compresiuni și, luând derivata în *valoare absolută*, găsim, lăsând un factor constant:

$$-\frac{1}{r^2}\left[h(R^2+r^2)+\frac{tg\,\alpha_0}{3}(R-r)\,(R^2+rR+4r^3)\right],$$

expresie evident negativă căci $r<R$.

Așa dar, compresiunile descresc dela r_0 la R, ceeace era și evident prin dublul fapt al descreșterei coloanei de lichid exteriore și al creșterei cercului paralel. Rezultă că $(-S)max$ corespunde la r_0.

Aplicația Nr. 47 A se calcula eforturile în rezervoarele cu pereți sferici.

Răspuns. Luăm ecuația (I) sub forma $S+S'=\varpi\rho z$, întrucât avem o singură rază de curbură constantă.

Mai întâi rezolvăm ecuația (II)

$$r\,S\sin\alpha=\varpi\int_{s_0\ sau\ s_1}^{r} z\,r\,dr.$$

Avem în toate cazurile în funcție de parametrul α:

$$r = \rho \sin \alpha, \quad dr = \rho \cos \alpha \, d\alpha$$

și

$$z = z_1 - \rho \, (1 - \cos \alpha),$$

z_1 fiind al polului cu $\alpha = 0$ sau 2π, care coincide cu s_1, altfel corespunzând unui pol fictiv; în figuri s'a însemnat polul facesta cu s_1 chiar când e fictiv, adică atunci când nu coincide cu s_1 al meridianei. Același lucru și pentru s_0. Când sfera nu se întinde până la s_0 sau s_1, la integrarea din (II) ne vom limita numai la arcul util al meridianei sferei, continuând integrarea pe restul liniei până la s_0 respectiv s_1 real, al întregei meridiane, după formulele speciale fiecărei curbe.

Ecuațiile (I) și (II) se mai pot exprima și în funcție de săgeata f a arcului Is_1I, aleasă ca parametru, înlocuind $\cos\alpha = 1 - f/\rho$; formulele obținute astfel sunt tot atât de generale, dacă considerăm pe f ca pozitiv în sus de polul s_1 (când și ρ este negativ).

Vom stabili și aceste formule, comode în aplicație, însă discuția o vom face cu formulele în α.

a) *Perete interior reazemelor* (cu s_1).

1° *Concavitate înspre lichid.* (ρ pozitiv) Un asemenea perete este suspendat de cercul de reazăm. Ecuația (II), când peretele sferic se întinde până la s_1, dă:

$$\rho S \sin^2 \alpha = \varpi \int_0^\alpha \rho \sin \alpha \left[z_1 - \rho (1 - \cos \alpha) \right] \rho \cos \alpha \, d\alpha$$

$$= \varpi \rho^2 \left[\int_0^\alpha (z_1 - \rho) \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha + \int_0^r \rho \cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha \right]$$

$$= \varpi \rho^2 \left[\frac{\sin^2 \alpha}{2} (z_1 - \rho) - \rho \frac{\cos^3 \alpha - 1}{3} \right]$$

$$S = \varpi \rho \left[\frac{z_1 - \rho}{r} + \frac{\rho}{3} \frac{1 - \cos^3 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \right]$$

sau

$$S = \varpi \rho \left[\frac{z_1 - \rho}{2} + \frac{\rho}{3} \left(\cos \alpha + \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \right]. \qquad \text{(II)}$$

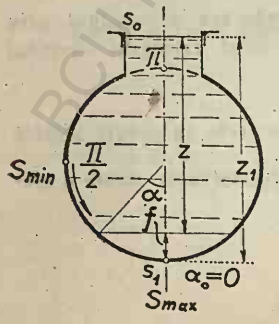


Fig. 146

Vom discuta variația lui S după această ecuație numai sub nivelul apei, unde ea se aplică exclusiv, în părțile neudate până la reazăm având o variație invers proporțională cu $r \sin \alpha$, după ecuația:

$$Sr \sin \alpha = const.$$

Partea variabilă a lui S, fără un factor constant pozitiv, este:

$$\cos \alpha + \frac{1}{1 + \cos \alpha}$$

cu derivata

$$-\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{-\sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha+2)}{(1+\cos\alpha)^2},$$

care are semnul lui $-\sin\alpha\cos\alpha$, devenind $+\infty$ pentru $\alpha=\pi$.

Discuția se rezumă astfel:

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{dS}{d\alpha}$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
S tensiune	$S_{max}=\frac{\varpi\rho}{2}z_1$	decreşte	$S_{min}=\frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1-\frac{\rho}{3}\right)$	creşte	$+\infty$

Se vede că $Smin$ coincide, cum era şi evident, cu S din peretele cilindric, care ar fi tangent la ecuator $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right)$.

$Smin$ este negativ pentru $z_1<\frac{\rho}{3}$, dar atunci ecuatorul s'ar afla deasupra planului de apă şi formula nu se aplică. Avem deci totdeauna tensiuni, păstrând din tabloul de mai sus, în cazul când $z_1<2\rho$, numai partea corespunzătoare peretelui sferic udat; deasupra nivelului până la reazăm aplicăm formula:

$$Sr\sin\alpha=const$$

adică

$$S\rho\sin^2\alpha=const$$

$$S=\frac{k}{\sin^2\alpha},$$

constanta rezultând din valoarea efortului în dreptul nivelului apei, calculat după prima formulă. Avem, aşa dar, o tranziție treptată între formule şi o variație continuă de tensiuni, crescând până la $+\infty$ în π.

Faptul, că pentru $\alpha=\pi$ tensiunea devine $+\infty$, se explică prin aceea că întreaga greutate a lichidului, adică o cantitate finită, atârnă la limită de o circumferință nulă.

Ecuația (I), înlocuind pe S, dă:

$$S'=\varpi\rho\left[z_1-\rho(1-\cos\alpha)-\frac{z_1-\rho}{2}-\frac{\rho}{3}\left(\cos\alpha+\frac{1}{1+\cos\alpha}\right)\right]$$

$$S'=\varpi\rho\left[\frac{z_1-\rho}{2}+\frac{2}{3}\rho\cos\alpha-\frac{1}{3}\frac{\rho}{1+\cos\alpha}\right]. \qquad (I)_1$$

Vom discuta şi cu această formulă numai ce se petrece în sfera udată, întrucât ecuația (I), din care a derivat, se aplică numai în acest caz; pentru peretele sferic neudat ($z=0$):

$$S'=-S$$

sau, după cele ce am discutat mai sus:

$$S' = -\frac{const}{\rho \sin^2 \alpha} = -\frac{k}{\sin^2 \alpha}.$$

Partea variabilă din S' este, fără un factor constant pozitiv:

$$2\cos\alpha - \frac{1}{1-\cos\alpha},$$

având ca derivată:

$$\frac{-\sin\alpha\,(2\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 3)}{(1+\cos\alpha)^2},$$

în care paranteza dela numărător fiind totdeauna pozitivă (rădăcini imaginare $-1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}$), semnul este dat de $\sin\alpha$.

Deci:

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{dS'}{d\alpha}$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
S'	$S'_{max} = \frac{\varpi\rho}{2} z_1$	descr.	$\frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{5}{3}\rho\right)$	descr.	$-\infty$

La $\alpha = \pi$, S' devine $-\infty$, aceasta rezultând și din $S + S' = \varpi\rho z$, unde am găsit $S = +\infty$.

Tensiunea se anulează, schimbându-se în compresiune, pentru:

$$\frac{z_1 - \rho}{2} + \frac{2}{3}\rho\cos\alpha - \frac{1}{3}\frac{\rho}{1+\cos\alpha} = 0$$

sau:

$$\frac{z_1}{\rho} = \frac{2}{3}\frac{1}{1+\cos\alpha} - \frac{4}{3}\cos\alpha + 1.$$

Dacă $z_1 = \rho$, adică nivelul apei este la ecuator, presiunile încep dela α, care satisface ecuația:

$$2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0,$$

adică

$$\alpha = arc\cos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}365\right)$$

sau:

$$\alpha \cong 68^0\,30', \text{ adică cu } 21^0\,30' \text{ sub ecuator,}$$

cealaltă soluție $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ fiind imaginară cu $\alpha < -1$.

Dacă $z_1 = 2\rho$, adică nivelul apei este tangent la partea superioară a sferei, prelungită geometric, avem de anulat expresia:

$$4\cos^2\alpha + 7\cos\alpha + 1$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceeace se întâmplă pentru:

$$\alpha = arc\ cos\left(\frac{-7+\sqrt{49-16}}{8} \cong -0{,}157\right),$$

(soluţia cealaltă fiind < -1), sau $\alpha \cong 95^0$, adică cu 5^0 deasupra ecuatorului.

Pentru ca compresiunile să înceapă chiar la ecuator, trebue ca:

$$z_1 = \frac{5}{3}\rho,$$

având atunci în emisfera inferioară numai tensiuni.

In s_1 vedem că $S'max = Smax = \frac{\varpi\rho}{2} z_1$, ceeace reese evident şi din (I), ţinând seama de simetria în jurul axei, pe care se află s_1, unde tangentele ortogonale după curbele s' şi s se confundă între ele în planul tangent în s_1.

La racordarea (fără tangenţă) unui fund sferic sau conic cu un perete cilindric, formulele pentru S' (cari derivă din ecuaţia $\frac{S}{\rho} + \frac{S'}{\rho'} = \varpi z$) nu dau aceaşi valoare, existând acolo o discontinuitate în variaţia lui ρ, care trece brusc dela o valoare finită (sferă sau con) la ∞ (cilindru), chiar dacă racordarea sferei s'ar face tangenţial (emisferă). De altfel şi ρ' numai în acest din urmă caz îşi păstrează continuitatea, în celelalte cazuri variind şi el brusc, deşi rămâne finit.

2^0 *Convexitate în spre lichid (ρ negativ).* Peretele este rezemat sau fixat în partea inferioară. Avem şi aci, cu ρ negativ, integrând dela s_1 la I adică dela 2π la α:

$$\varpi\rho\left[\frac{z_1-\rho}{2} - \frac{\rho}{2}\frac{cos^3-1}{sin^2\alpha}\right],$$

adică deasemenea

$$S = \varpi\rho\left[\frac{z_1-\rho}{2} + \frac{\rho}{3}\left(cos\,\alpha + \frac{1}{1+cos\,\alpha}\right)\right], \qquad \text{(II) i}$$

însă aci α are alte valori dela s_1 la s_0, variind dela 2π la π (la ecuator: $\frac{3\pi}{2}$).

Derivata:

$$-\frac{sin\,\alpha\,cos\,\alpha\,(cos\,\alpha+2)}{(1+cos\,\alpha)^2}$$

dă tabloul următor, în care însă valorile lui α fiind dispuse în ordine descrescândă, la $+$ al derivatei corespunde o descreştere în acel sens şi la $-$ o creştere.

α	2π		$\frac{3\pi}{2}$		π
$\frac{dS}{d\alpha}$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
S	$\frac{\varpi\rho}{2} z_1$ descreşte		$Smin = \frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{\rho}{3}\right)$	creşte	$+\infty$

Vom avea deci compresiune dela s_1 până dincolo de ecuator, apoi tensiuni crescânde la $+\infty$.

Cum (II) a rămas în aceași formă ca în cazul precedent, vom avea pentru S' tot:

$$S' = \varpi\rho\left[\frac{z_1-\rho}{2} + \frac{2}{3}\rho\cos\alpha - \frac{1}{3}\frac{\rho}{1+\cos\alpha}\right],$$

la derivata părței variabile intervenind pentru semn tot $-\sin\alpha$ din expresia:

$$\frac{-\sin\alpha\,(2\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 3)}{(1+\cos\alpha)^2},$$

cu variația ce rezultă din tabloul următor:

α	2π		$\frac{3\pi}{2}$		π
$\frac{dS'}{d\alpha}$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
S'	$\frac{\varpi\rho}{2}z_1$ descreșt	$S' = \frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{5}{3}\rho\right)$	descreșt		$-\infty$

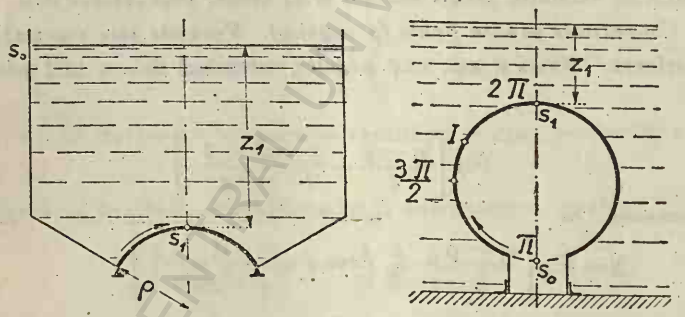


Fig. 147

Avem tensiuni, cari dela o valoare a lui α (d. e. la ecuator, dacă $z_1 = \frac{5}{3}\rho$) devin compresiuni, cari în valoare absolută cresc la ∞. Formulele pentru S și S' de mai sus, adică în pereții interiori reazemelor, pentru cari integrarea se face dela s_1 la I, exprimate în funcție de săgeata f, devin:

$$S = \frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{f}{3}\frac{3\rho-2f}{2\rho-f}\right) \qquad \text{(II)i}$$

și

$$S' = \frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{f}{3}\frac{9\rho-4f}{2\rho-f}\right). \qquad \text{(I)i}$$

b) *Perete exterior reazemelor (cu s_0).*

1₀. *Concavitate în spre lichid* (ρ *pozitiv*). Un asemenea perete este rezemat. La integrarea ecuației (II) dela s_0 la I adică dela π la α obținem (întrebuințând indicii e și i ca distinctivi ai pereților exteriori și interiori reazemelor):

BCU „I. C. Brătianu" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$S = \varpi\rho\left[\frac{z_1-\rho}{2} - \frac{\rho}{3}\frac{\cos^3\alpha+1}{1-\cos^2\alpha}\right] = \varpi\rho\left[\frac{z_1-\rho}{2} + \frac{\rho}{3}\left(\cos\alpha - \frac{1}{1-\cos\alpha}\right)\right]. \quad \text{(II)e}$$

La ecuator avem:

$$S_{e\,\pi/2} = \varpi\rho\left(\frac{z_1-\rho}{2} - \frac{\rho}{3}\right) = \frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{5\rho}{3}\right),$$

pe când în cazul sferei suspendate (interioară reazemelor) am găsit:

$$S_{i\,\pi/2} = \frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{\rho}{3}\right),$$

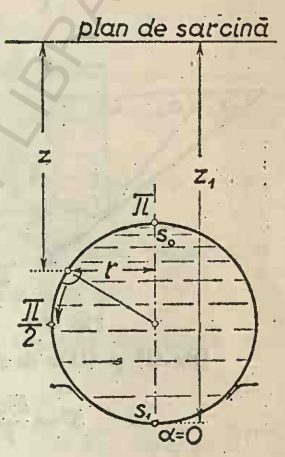


Fig. 148

adică o diferență, pentru întregul ecuator, de:

$$2\pi\rho\left(S_{i\,\pi/2} - S_{e\,\pi/2}\right) = \frac{4}{3}\pi\varpi\rho^3,$$

ceeace este explicabil, aceasta fiind diferența de greutate a coloanelor de apă, care ar avea ca baze cele două emisfere.

Derivata părții variabile, rămase după suprimarea a torului constant pozitiv

$$\cos\alpha - \frac{1}{1-\cos\alpha},$$

este

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha\,(2-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)^2},$$

având semnul lui $\sin\alpha\cos\alpha$.

Tabloul discuției este, analog ca mai sus (pentru α descrescător):

α	π		$\frac{\pi}{2}$		0
$\frac{dS}{d\alpha}$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
S	$\frac{\varpi\rho}{2}(z_1-2\rho)$	descreşte	$S_{max} = \frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1-\frac{5}{3}\rho\right)$	descreşte	$-\infty$

S dela ecuator se anulează pentru $z_1 = \frac{5}{3}\rho$, dar atunci nivelul apei este sub s_0 şi integrarea trebue începută dela acel nivel (z deasupra nivelului reputând fi luat negativ ci egal cu zero). Pentru ca formula de mai sus să fie aplicabilă fără a fi modificată, trebue ca $z_1 \geqslant 2\rho$, în care caz la ecuator vom avea totdeauna tensiuni, cari vor continua şi sub ecuator. Dacă am lua cazul limită $z_1 = 2\rho$, compresiunile vor începe la α rezultat din anularea lui S, adică:

$$\alpha = arc\cos\frac{1}{2},$$

soluția cealaltă $\cos\alpha = -1$, adică $\alpha = \pi$, corespunzând vârfului de unde începe să

crească compresiunile (dela 0) spre ecuator. Cu cât z_1 va fi mai mare cu atât tensiunile vor începe la vârf cu o valoare mai mare și se vor întinde pe o zonă mai mare sub ecuator.

In cazul când sfera nu se închide la s_0 ci este continuată în acea parte printr'un alt perete, d. e. un cilindru (Fig. 149), integrarea se va face dela s_0 al acestui meridian mixt la I. Cum dela s_0 la I_0 integrala este nulă, suntem conduși a integra numai dela I_0 la I tot prin ecuația sferei:

$$S = \varpi\rho \left[\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha} \left(z_1 - \rho \right) - \frac{\rho}{3} \frac{\cos^2\alpha - \cos^3\alpha_0}{\sin^2\alpha} \right].$$

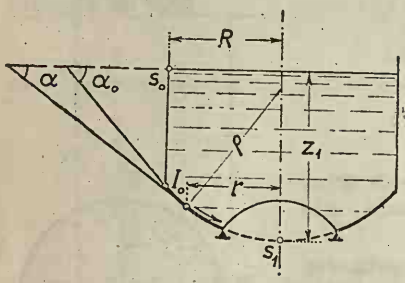


Fig. 149

Discuția depinde aci și de mărimea unghiului α_0. Se poate însă compara cazul cu sfera completă până la s_0, față de care intervine în minus cantitatea de lichid exterioară cilindrului.

Variația eforturilor va fi deci aceeași, adică ele vor descrește în spre S_1, și cum atât din figură cât și din comparația cu tabloul discuției se vede că ele sunt compresiuni, vom avea compresiuni crescânde în spre s_1, adică pe ceea maximă la reazeme.

Din (I) și (II)e deducem:

$$S' = \frac{\varpi\rho}{2} \left[\frac{z_1 - \rho}{2} + \frac{2}{3}\rho\cos\alpha + \frac{1}{3}\frac{\rho}{1-\cos\alpha} \right], \qquad (I)e$$

cu derivata părței variabile (fără o constantă pozitivă):

$$\frac{-\sin\alpha\,(2\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 3)}{(1-\cos\alpha)^2},$$

care are semnul lui $-\sin\alpha$, rădăcinile trinomului fiind imaginare.

Deci:

α	π		$\frac{\pi}{2}$		0
$\frac{dS'}{d\alpha}$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
S' tensiune	$\frac{\varpi\rho}{2}(z_1 - 2\rho)$	crește	$\frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1 - \frac{\rho}{3}\right)$	crește	$+\infty$

Avem peste tot tensiuni.

2⁰ *Convexitate în spre lichid* (ρ *negativ*). Peretele este fixat în partea de sus.

La integrarea ecuației (II) dela s_0 la I adică dela π la α, obținem tot:

$$S = \varpi\rho \left(\frac{z_1 - \rho}{2} - \frac{\rho}{3}\frac{\cos^3\alpha + 1}{\sin^2\alpha} \right) = \varpi\rho \left[\frac{z_1 - \rho}{2} + \frac{\rho}{3}\left(\cos\alpha - \frac{1}{1-\cos\alpha} \right) \right], \qquad (II)e$$

ca în cazul precedent, însă aci α are alte valori, variind dela π în s_0 la 2π în s_2 $\left(\text{la ecuator: } \frac{3\pi}{2}\right)$.

Derivata părței variabile se reduce la:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha(2-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)^2},$$

conducând la următorul tablou:

α	π		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$\frac{dS}{d\alpha}$	0	+	0	−	$-\infty$
S compres.	$\frac{\varpi\rho}{2}(z_1-2\rho)$	crește	$S_{max}=\frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1-\frac{5}{3}\rho\right)$	descrește	$-\infty$

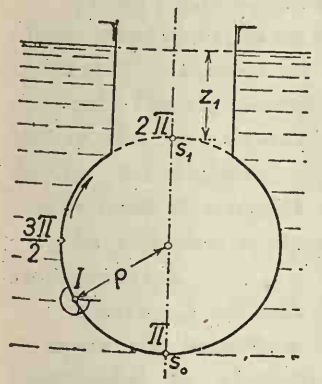


Fig. 150

Avem numai compresiuni (ρ fiind negativ), a căror valoare are un minimum la $\frac{3}{2}\pi$.

Ecuația S' se deduce identică cu aceea de mai sus:

$$S'=\varpi\left[\frac{z_1-\rho}{2}+\frac{2}{3}\rho\cos\alpha+\frac{1}{3}\frac{\rho}{1-\cos\alpha}\right], \text{ (I)e}$$

cu derivata părței variabile, fără un factor constant pozitiv:

$$\frac{-\sin\alpha(2\cos^2\alpha-4\cos\alpha+3)}{(1-\cos\alpha)^2},$$

având semnul lui $-\sin\alpha$.

Deci:

α	π		$\frac{3}{2}$		2π
$\frac{dS'}{d\alpha}$	0	+	+	+	$+\infty$
S'	$\frac{\varpi\rho}{2}(z_1-2\rho)$ crește		$S'_{max}=\frac{\varpi\rho}{2}\left(z_1-\frac{\rho}{3}\right)$	crește	$+\infty$

Dela s_0 avem compresiuni, cari deasupra ecuatorului undeva devin tensiuni, crescând la infinit.

Formulele în funcție de săgeată f, în cazul pereților exteriori reazemelor, sunt $\left(\text{înlocuim } \cos\alpha=1-\frac{f}{\rho}\right)$.

$$S=\frac{\varpi\rho}{2}\left[z_1-\frac{1}{3}\left(\rho+2f+2\frac{\rho^2}{f}\right)\right] \qquad \text{(II)e}$$

CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau:

$$\frac{\varpi\rho}{2}\left[z_1+\rho-\frac{2}{3}\frac{(f+\rho)^2}{f}\right]$$

și

$$S'=\frac{\varpi o}{2}\left[z_1+\frac{1}{3}\left(\rho-4f+2\frac{\rho^2}{f}\right)\right]. \qquad (1)e$$

Vedem că ecuațiile, deduse din formulele generale, diferă ca formă numai după cum integrarea se face pe o suprafață interioară sau exterioară reazemelor, singura distincțiune deci ce trebue făcută în studiul acestor pereți.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. IX.

CAPILARITATE ŞI TENSIUNE SUPERFICIALĂ.

1. Privire teoretică.

După *Laplace*, două molecule ale unui lichid exercită una asupra alteia, după dreapta ce le unește, o atracție proporțională cu masele lor m și m', valoarea ei fiind funcție exclusivă a distanței r dintre molecule. Forma acestei funcții este necunoscută, însă la legea formulată se admite o descreștere rapidă a atracției în așa fel, încât aceasta devine insensibilă, îndată ce distanța r depășește o cantitate foarte mică a, numită *rază de activitate moleculară*.

In virtutea ipotezei prime, forțele moleculare $mm'f(r)$ admit un potențial.

Pentru o pătură, de grosime a, dela suprafața liberă, în presupunerea că aceasta n'ar veni în contact cu un alt mediu fluid, potențialul în chestiune, la un calcul mai riguros, ar trebui să figureze exact alături de potențialul forțelor exterioare.

Dincolo de această pătură în spre interior, orice moleculă de lichid este sustrasă efectului atracțiunilor moleculare asupra ei, deoarece acestea se echilibrează, pe când pentru o moleculă din chiar pătura menționată, adică la o distanță dela suprafață $< a$ d. e. în centrul cercului din fig. 151, echilibrarea asupra moleculei în chestiune se face numai între atracțiile moleculelor din partea hașurată a sferei de rază a, moleculele din calota nehașurată exercitând o acțiune de atracție în jos asupra moleculei centrale.

Așa dar, orice moleculă din pătura superficială de grosime a este atrasă de o rezultantă îndreptată în spre interior pe direcția normalei. Această atracție rezultantă este evident maximă pentru moleculele din chiar suprafața liberă, pentru cari calota în chestiune atinge semisfera.

In afară de teoria lui *Laplace* și aceea a lui *Gauss* (cu aplicarea principiului vitezelor virtuale) bazate ambele pe ipoteza for-

ţelor centrale, mai există şi alte teorii ale capilarităţii, d. e. aceea, mai recent în favoare, a *tensiunei superficiale*, iar experienţa nu poate să decidă între aceste teorii, deoarece toate conduc exact la aceleaşi rezultate, ceeace ne face să conchidem la echivalenţa lor (vezi *Capillarité par H. Poincaré 1895*).

Aceasta echivalenţă se poate arăta în mod elementar precum urmează.

La turnarea unei cantităţi mici de lichid pe un suport orizontal se formează picături — ceeace nu se întâlneşte la gaze —, deci suprafaţa liberă nu este orizontală ca în cazul acţionărei exclusiv a forţelor din câmpul gravităţii. Picătura în repaus constitue în orice caz o figură de echilibru a lichidului, care arată prezenţa şi altor forţe, despre cari nu s'a vorbit în capitolele precedente.

In *teoria atracţiei moleculare*, enunţată mai sus, moleculele dintr'un strat superficial foarte subţire (de grosime a) sunt supuse precum am spus unei atracţii în spre interior.

Fig. 151

Aşa dar, pentru a transporta o moleculă din interiorul lichidului la suprafaţă, independent de gravitaţie, trebue întrebuinţat, în ultima porţiune a drumului de lungime a contra menţionatei atracţii, un anumit lucru, evident acelaşi pentru fiecare moleculă.

Sporul de suprafaţă însă $d\Omega$, al unei anumite mase lichide de volum constant, nu poate proveni decât din transportul la suprafaţă al unui număr de molecule din interior, proporţional tocmai cu $d\Omega$. Rezultă că creşterea de suprafaţă $d\Omega$ cere desvoltarea unui lucru mecanic, proporţional cu această creştere:

$$d\mathfrak{T} = S\, d\Omega, \qquad (1)$$

unde constanta S se poate socoti ca *energia superficială specifică* a lichidului.

Dacă trecem acum la ipoteza *tensiunei superficiale* şi atribuim elementului $d\Omega$ cu care a crescut suprafaţa, lungimea l şi lăţimea $d\Omega$, atunci în egalitatea (1) S apare ca o forţă tangenţială suprafeţei, raportată la unitatea de lungime, pe care este nomală şi al cărei punct de aplicaţie s'a deplasat în direcţia lăţimei cu $d\Omega$.

Putem deci înlocui prezenţa atracţiunei moleculelor prin prezenţa unei tensiuni superficiale, identică cu accea dintr'o pânză iflexibilă (aci însă extensibilă), studiată în capitolul precedent, în poteza $S = S'$. In general putem, aşa dar, după procedeul lui

Young, înlocui acțiunea atracției moleculare a unui fluid prin *tensiunea superficială constantă* a unei pelicule, care (având în vedere că sporirea suprafeței cere lucru mecanic) are tendința să *micșoreze suprafața lichidului.*

Dacă suprafața considerată desparte două fluide diferite, ce nu se amestecă unul cu altul, o moleculă, care din interiorul unuia din fluide ajunge la suprafața de separație, intră acolo în câmpul de acțiune și a moleculelor din al doilea lichid Potențialul sau tensiunea superficială S diferă deci de cele menționate, fiind funcție de proprietățile ambelor fluide în contact. Bine înțeles influența unui gaz, din cauza micei densități a acestuia, este foarte mică asupra tensiunei superficiale. In cazul când avem două lichide în contact între ele și cu aerul, având față de acesta tensiunile superficiale S_1 și S_2, fie S_{12} tensiunea din suprafața lor de separație, care ar fi evident cu atât mai mică cu cât densitățile acestor lichide se apropie una de alta.

Dacă lichidul mai ușor plutește pe celălalt sub formă de picătură (Fig. 152), la marginea acesteia cele trei tensiuni trebue să se echilibreze, vectorii lor formând un triunghiu, care determină și unghiurile de inclinare dintre cele trei suprafețe la intersecția acestora. Echilibrul nu este posibil dacă triunghiul nu este construibil, adică dacă

$$S_1 > S_2 + S_{12}.$$

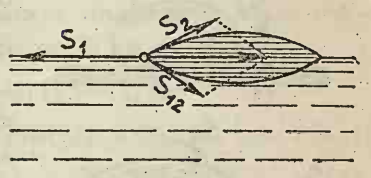


Fig. 152

Rezultă că, *dacă una din tensiunile superficiale este mai mare ca suma celorlalte două, picătura lichidului mai ușor nu este o figură de echilibru deasupra celui mai greu;* din contra, prin acțiunea excesului de tensiune picătura inițială se va întinde mereu, până când va acoperi suprafața lichidului mai greu.

Câteva exemple. Avem pentru:

alcool față de aer	$S = 0{,}0258$	*gr. pondere/cm*
undelemn față de aer	$S = 0{,}0327$	„ „ „
sulfură de carbon față de aer	$S = 0{,}0330$	„ „ „
apă față de aer	$S = 0{,}0770$	„ „ „
mercur față de aer	$S = 0{,}4700$	„ „ „
alcool față de apă	$S = 0{,}0023$	„ „ „
undelemn față de apă	$S = 0{,}0210$	„ „ „
apă față de sulfură de carbon	$S = 0{,}0400$	„ „ „
mercur față de apă	$S = 0{,}4210$	„ „ „
mercur față de undelemn	$S = 0{,}3420$	„ „ „

In consecință, pe o suprafață liberă de mercur, untdelemnul nu poate forma picături în repaus. Marea tensiune superficială a unor lichide, ca mercurul și apa, face ca orice urmă a unui alt lichd să producă pătarea întregei lor suprafețe.

Corpurile solide posedă deasemenea o tensiune superficială, atât față de gaze cât și față de lichide, cu singura particularitate că forma suprafeței lor nu se poate modifica prin tensiunea superficială și că, componenta normală pe o suprafață solidă nu e nevoie să fie nulă, ea echilibrându-se cu reacțiunea normală a peretelui.

Dacă S_1 se referă la lichidul față de aer și S_2 la corpul solid față de aer, S_{12} fiind tensiunea superficială a suprafeței dintre solid și lichid, suprafața lichidului va face cu peretele solid un anumit *unghiu de racordare* θ, care se poate calcula din echilibrul forțelor, paralel cu peretele, adică din relația:

$$S_1 \cos\theta + S_{12} = S_2. \qquad (2)$$

Unghiul de racordare θ este obtuz sau ascuțit, după cum

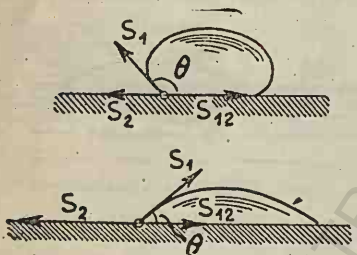


Fig. 153

$S_2 \lessgtr S_{12}$ sau după cum peretele solid *nu este muiat* sau *este muiat* de lichid. Acest unghiu este în ori ce caz condiționat de tensiunile superficiale ale corpurilor cari se întâlnesc în fiecare punct, putând fi introdus drept o constantă în locul uneia din aceste tensiuni.

2. Exemple.

Să considerăm acum *suprafața de separație* dintre două fluide a și b (cu greutățile specifice ϖ_a și ϖ_b), care într'o regiune oarecare, d. e. din cauza acțiunei unui perete solid, se abate dela planul de nivel, găsindu-se la adâncimea z sub acest plan pentru abscisa x față de origină O, arbitrar aleasă, unde domnește presiunea p_0. Presiunile de ambele părți ale suprafeței *curbe* (putând deci fi diferite) la punctul (x, z) sunt date de:

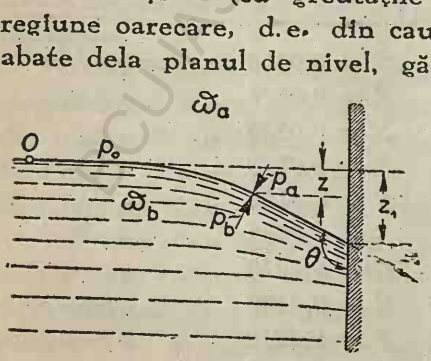


Fig. 154

$$p_a = p_0 + \varpi_a z$$

$$p_b = p_0 + \varpi_b z,$$

diferența fiind echilibrată de componenta normală a tensiunei superficiale constante din suprafața de comparație.

După capitolul precedent vom avea:

$$p_b - p_a = (\varpi_b - \varpi_a)\, z = S\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right). \qquad (3)$$

Dacă fluidul superior este un gaz, putându-se lua aproximativ $\varpi_a \cong 0$, vom avea, punând $\varpi_b = \varpi$:

$$S\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) = \varpi z. \qquad (3)'$$

Dacă peretele este plan și avem un fenomen plan față de planul figurei ca plan director, suprafața de separație este cilindrică și intervine o singură curbură, formula devenind

$$S = \varpi z \rho. \qquad (3)''$$

Rezultă că un lichid cu rază de curbură pozitivă — concavitatea în spre interior — încearcă o coborîre (z fiind pozitiv), iar în cazul concavității în spre exterior, invers, o ridicare a lichidului față de nivelul normal. Dacă introducem unghiul α, măsurat ca în capitolul precedent, avem relația de acolo în cos

$$2S(cos\,\alpha - cos\,\alpha_1) = \varpi(z^2 - z_1^2),$$

care, pentru origina O, cu tangenta orizontală, a figurei precedente:

$$z_1 = 0 \quad \text{și} \quad \alpha_1 = \pi, \quad \text{devine} \quad 2S(1 + cos\,\alpha) = \varpi z^2. \qquad (4)$$

In aceeași figură, dacă ne referim la punctul de lângă perete (vezi și partea analoagă din figura următoare cu $\alpha = \alpha_2$) pentru care $\alpha = \alpha_2 = \theta + \pi/2$ și deci $cos\,\alpha = -sin\,\theta$, obținem

$$z = \sqrt{\frac{2S}{\varpi}(1 - sin\,\theta)}. \qquad (4)'$$

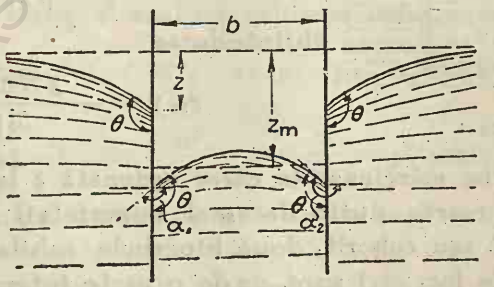


Fig. 155

Cu această relație putem calcula pe S, măsurând la perete pe z și pe θ.

Să luăm acum (Fig 155) două plăci din acelaşi material, verticale şi paralele, cufundate într'un lichid. De ambele feţe ale plăcilor se va stabili evident acelaşi unghiu de racordare θ.

De asemenea coborîrile lichidului în exteriar vor fi egale între ele, precum şi cele interioare.

Relaţia în *sin* din capitolul precedent — a nu se uita că la stabilirea formulelor sensul pozitiv pentru *ds* a fost acela ce lasă lichidul la stânga — dă pentru partea interioară

$$S\,(sin\,\alpha_1 - sin\,\alpha_2) = \varpi \int_1^2 z\,dx,$$

şi cum

$$\alpha_1 - \frac{\pi}{2} = \pi - \theta \quad \text{adică} \quad sin\,\alpha_1 = -\cos\theta$$

şi

$$\alpha_2 = \theta + \frac{\pi}{2} \qquad ,, \qquad sin\,\alpha_2 = \cos\theta,$$

această relaţie, cu introducerea coborîrei medii z_m, dă:

$$-2\,S\cos\theta = \varpi\, z_m\, b\,. \tag{5}$$

Cum pentru lichidele cari *nu moaie*, ca în figură. avem $\cos\theta < 0$, vom avea z_m pozitiv (coborîre), iar pentru lichidele ce *moaie* vom avea $\cos\theta > 0$, şi deci z_m va fi negativ (urcare). Se vede că z_m este invers proporţional cu b.

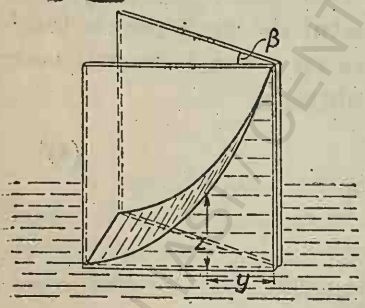


Fig. 156

Dacă cele două plăci formează un unghiu diedru β (Fig. 156), se poate lua aproximativ, pentru β mic, b proporţional cu distanţa y de la muchie:

$$b = \beta\, y,$$

obţinându-se

$$z_m\, y = -\frac{2\,S\cos\theta}{\varpi\,\beta}, \tag{6}$$

adică drept curbe mărginaşe (a căror ordonată z la distanţa y de muchie diferă foarte puţin de z_m al suprafeţei) ale suprafeţei fluidului ridicat sau coborît, două hiperbole echilatere, cuprinse între asimptotele lor, cari sunt pe de o parte intersecţiile plăcilor cu nivelul orizontal din recipient iar pe de altă parte muchia verticală a unghiului diedru.

In cazul unui tub vertical, din motive de simetrie suprafața liberă va fi de asemenea o suprafață de rotație. Dacă α este unghiul de înclinare al elementului ds la distanța r de axă, am văzut în capitolul precedent că avem:

$$\rho = \frac{dr}{d(\sin\alpha)}$$

și

$$\rho' = \frac{r}{\sin\alpha},$$

relația principală (3) găsită mai sus luând forma:

$$(\varpi_a - \varpi_b)\, z + S\,\frac{d(r\sin\alpha)}{r\,dr} = 0. \qquad (7)$$

Dacă lichidul se găsește într'un tub capilar îngust, cufundat în același lichid supus presiunii atmosferice, putem pune aprox. $\varpi_a = 0$ și $\varpi_b = \varpi$ și neglijând, față de urcarea (sau coborîrea) medie z_m, diferențele de cote ale particulelor suprafeței libere, întru cât diferența Δz_{max}, adică săgeata menisculului, este foarte mică în raport cu z_m, vom putea scrie relația de mai sus, luând acum axa z ascendentă și deci schimbând semnul lui z pentru a păstra convențiile făcute

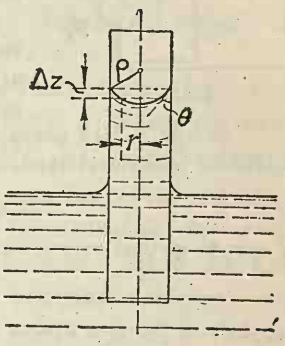


Fig. 157

$$S\,\frac{d(r\sin\alpha)}{r\,dr} = -\varpi z_m. \qquad (7)'$$

Integrarea dă (avem $\alpha = 0$ pentru $r = 0$)

$$\frac{\sin\alpha}{r} = -\frac{\varpi z_m}{2S} = \frac{1}{\rho'}, \qquad (8)$$

deci ρ' este constant și egal cu valoarea dela perete $-\frac{r_0}{\cos\theta}$, căci pentru raza tubului $r = r_0$ avem pe meridiana din stânga $\sin\alpha_1 = -\cos\theta$.

Atunci însă și $\rho = \frac{dr}{d(\sin\alpha)} = \frac{r}{\sin\alpha} = \rho'$, astfel că avem, cu aproximația admisă, o singură rază de curbură negativă (convexitatea udată):

$$\rho = -\frac{\varpi z_m}{2S},$$

meniscul coloanei capilare fiind *aproximativ* o calotă sferică cu săgeata

$$\Delta z_{max} = -\rho(1-\sin\theta) = \frac{r_0(1-\sin\theta)}{\cos\theta}.$$

Măsurând această săgeată obţinem pe θ, iar din expresia razei ρ în funcţie de z_m determinăm pe S.

Aplicaţia Nr. 47. După cum am arătat fenomenele capilare se pot interpreta, admiţând că există o peliculă superficială, întinsă pe srprafeţele libere, peliculă care are aceaşi tensiune pe unitatea de lungime în toate direcţiunile.

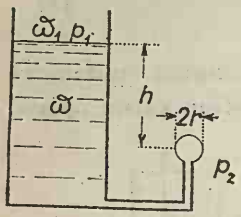


Fig. 158

Dintr'un vas plin cu lichid, înconjurat cu aburi, ies în F o picătură, care, graţie tensiunei superficiale capilare, se menţine în echilibru sub formă sferică.

Fie p_1 presiunea aburului la suprafaţa liberă şi p_2 în vecinătatea picăturei, ϖ şi ϖ_1 fiind greutăţile volumice ale lichidului şi aburului.

A se găsi care este valoarea S a tensiunei superficiale capilare pe unitatea de lungime, cunoscând diametrul $2r$ al picăturei şi înălţimea h a nivelului deasupra centrului picăturei.

Soluţie. Dacă presupunem picătura tăiată prin planul diametral orizontal, echilibrul hemisferei superioare cere ca:

$$\pi r^2 (p_1 + \varpi h) = \pi r^2 p_2 + 2\pi r S,$$

şi cum în mediul exterior avem:

$$p_2 = p_1 + \varpi_1 h,$$

rezultă:

$$S = \frac{r}{3} h (\varpi - \varpi_1) = \frac{r}{2} (p_2 - p_1) \frac{\varpi - \varpi_1}{\varpi_1} \quad (Stodola).$$

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

CAP. X.

REPAOS RELATIV.

1. Generalităţi.

Dacă un vas, conţinând un fluid, este animat de o mişcare oarecare de antrenare, lichidul în general nu se va putea menţine în stare de echilibru şi repaos relativ (faţă de un sistem de axe solidar cu vasul). Să examinăm ce anume feluri de mişcări de antrenare sunt compatibile cu o asemenea stare.

In cazul echilibrului *relativ*, în ecuaţiile Hidrostaticei proecţiunile F_x, F_y, F_z ale forţei masice F, ce solicită unitatea de masă, luată într'un punct fix faţă de menţionatele axe, vor cuprinde, pe lângă proecţiile gravităţii $\bar{g}$, şi proecţiunile forţei de inerţie a mişcărei de antrenare, redusă deasemenea la unitatea de masă, adică proecţiile *acceleraţiei mişcărei de antrenare*, luată în acel punct, însă cu semn schimbat. Intradevăr, studiul mişcărei sau *echilibrului relativ* al unui punct material, în speţă a unei molecule, se reduce, precum ştim, la un caz de mişcare sau *echilibru absolut*, dacă, pe lângă forţele reale ce solicită molecula, se introduc forţele fictive de inerţie: acestea constă pe de o parte din *forţa cu semn schimbat, care ar imprima moleculei mişcarea respectivă de antrenare*, iar pe de altă parte din *forţa centrifugă compusă* sau a lui *Coriolis*. Ultima forţă însă, fiind proporţională cu vitesa relativă, în cazul repausului relativ este nulă, astfel că forţele fictive menţionate, aplicate masei unitare, se reduc în cele din urmă la acceleraţia, cu semn schimbat, a mişcărei de antrenare a punctului (presupus solidar cu vasul), pe care îl ocupă în fiecare moment masa în chestiune.

2. Ecuaţia şi condiţiile repausului relativ.

Pentru ca să existe repaus, trebue să existe echilibru între forţele cari solicită fiecare moleculă în parte. Poate însă exista echilibru de forţe şi fără ca să existe repaus, cum este cazul când

tot sistemul este animat de aceiași vitesă de translație. Acest caz fiind puțin interesant, în practică se vorbește indiferent de echilibru sau de repaus. În acest capitol ne vom ocupa de repausul relativ, care presupune evident echilibrul relativ.

a) *Ecuația.*

Să reluăm ecuația de echilibru sub forma generală:

$$0 = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right),$$

care se aplică și la echilibrul relativ, dacă F, precum am arătat, este rezultanta forțelor reale și de inerție, care în sistemul antrenat lucrează asupra unității de masă.

Vom admite că presiunea p într'un punct oarecare al masei fluide poate varia cu timpul (ceace în unele cazuri, de exemplu într'un vas închis plin cu lichid, este compatibil cu starea de echilibru sau de repaus relativ a lichidului) și, introducând diferențiala totală dp, vom putea scrie ecuația de mai sus sub forma mai concentrată

$$\frac{dp}{\rho} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}\,dt\,. \qquad (1)$$

După cele arătate, în cazul echilibrului relativ, raportat la axe antrenate, vectorul $\overline{F}$ al acceleraţiei unei molecule A a fluidului se va compune, în fiecare moment, din suma geometrică a gravității $\overline{g}$ și a vectorului, cu sens schimbat, care reprezintă acceleraţia totală de antrenare (exprimată eventual prin componentele ei) a punctului sistemului de antrenare, ocupat momentan de moleculă.

Ecuația fizică pentru orice punct este și aci, în cazul lichidelor:

$$\rho = const\,,$$

iar în cazul fluidelor elastice:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}\left(1 + \frac{\theta}{273}\right). \qquad (2)$$

Ultima ecuație sub θ constant se reduce la

$$\frac{p}{\rho} = const\,,$$

iar în cazul fenomenelor adiabatice ia forma specială

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = const.$$

In fine, ecuația de continuitate, enunțată sub forma *conservării masei*, fiind, în cazul repausului (absolut sau relativ), exprimată prin

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

pentru ambele feluri de fluide, intervine în mod special numai la gaze, fiind atunci echivalentă, datorită relației fizice, cu

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

La lichidele incompresibile condiția

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

este cuprinsă implicit în ipoteza admisă, a unei densități constante în spațiu și în timp și a continuității masei, fără a antrena totuși condiția,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

cu care deci nu este echivalentă.

Presiunea p are și în repaus relativ, în orice moment, o valoare determinată în orice punct al fluidului, și cum factorul integrant $\frac{1}{\rho}$ din ecuația (1) este: ori constant ori funcție de p, trebue ca membrul al doilea să fie diferențiala exactă a unei funcțiuni uniforme $f(x, y, z, t)$, adică să avem:

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fie $o\xi,\eta,\zeta$ un sistem de axe dreptunghiulare solidare cu pământul, presupus fix, Ox,y,z un alt triedru de referinţă, deasemenea dreptunghiular, solidar cu vasul. Am ales pe figură axele astfel cum se dau în astronomie, sensul unei învârtiri $Ox \to Oy$ fiind legat cu sensul unei translaţii Oz, după regula burghiului.*)

Mişcarea de antrenare poate fi privită ca fiind compusă în orice moment din :

1^0 — O *translaţie*, care dă aceeaşi viteză $\bar{V}$ şi aceeaşi acceleraţie $\bar{\Gamma}$ oricărui punct al sistemului antrenat, egale deci, respectiv, cu *viteza* şi *acceleraţia* originei sau vârfului $O\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ al triedrului mobil; proecţiile lui $\bar{V}$ şi $\bar{\Gamma}$ pe axele fixe sunt respectiv :

$$V_\xi = \frac{d\xi_0}{dt} \quad , \quad V_\eta = \frac{d\eta_0}{dt} \quad , \quad V_\zeta = \frac{d\zeta_0}{dt} \quad ,$$

şi

$$\Gamma_\xi = \frac{d^2\xi_0}{dt^2} \quad , \quad \Gamma_\eta = \frac{d^2\eta_0}{dt^2} \quad , \quad \Gamma_\zeta = \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} \quad .$$

2^0 — O *rotaţie* în jurul unei axe instantanee, trecând prin O, care va da fiecărui punct al sistemului de antrenare o *viteză* v şi o *acceleraţie* γ cu proecţiile arătate mai jos.

Prin adunarea proecţiilor de acelaşi fel de sub 1^0 şi 2^0, referitoare la un punct oarecare al sistemului de antrenare, obţinem proecţiile *vitesei* şi *acceleraţiei totale* a acelui punct.

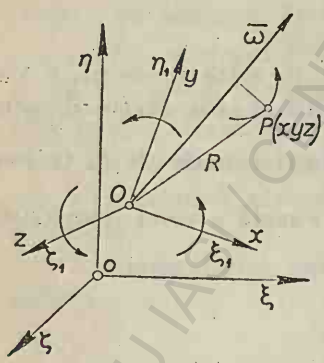


Fig. 159

Cum ecuaţiile de echilibru relativ trebuesc stabilite faţă de axele mobile, avem nevoie de proecţiile tuturor vectorilor pe Ox, Oy, Oz. Fie deci V_x, V_y, V_z şi Γ_x, Γ_y, Γ_z, proecţiile vectorilor translaţiei ($\bar{V}$ şi $\bar{\Gamma}$), identice pentru toate punctele sistemului antrenat.

In ceeace priveşte componentele sau proecţiile vitesei şi ale acceleraţiei unui punct din sistemul de antrenare, supus unei rotaţiuni de ansamblu cu vitesa unghiulară instantane ω în jurul unei

*) Pentruca formulele Mecanicei să se păstreze cu semnul lor uzual, trebue ca sensul vectorului reprezentativ al unei *rotaţii* (sau al unui *moment*), având sensul $Ox \to Oy$, să fie luat acelaşi cu al lui $\vec{Oz}$ (care d. e. aci s'a ales în sensul de înaintare al unui burghiu, având direcţia acestei axe şi presupus că se învârteşte în sensul $Ox \to Oy$). De asemenea trebue ca şi produsul geometric a doi vectori, unul după $\vec{Ox}$ şi altul după $\vec{Oy}$, să fie luat ca vector în direcţia şi sensul $\vec{Oz}$.

axe instantanee de rotaţie trecând prin origină, expresiile lor analitice ne sunt cunoscute din cinematică. Faţă de *axe fixe*, ele au o formă simplă atunci când origina acestora se alege pe axa de rotaţie.

Pentru a atinge scopul nostru de a avea vitesele şi acceleraţiile în chestiune v_x, v_y, v_z şi γ_x, γ_y, γ_z după axele Ox,y,z, şi fiind vorba de cantităţi instantanee, putem lua provizoriu nişte axe de referinţă fixe $O\xi_1,\eta_1,\zeta_1$, în coincidenţă cu axele mobile Ox,y,z, în poziţia lor instantanee; vom avea atunci

$$\xi_1 = x, \quad \eta_1 = y, \quad \zeta_1 = z,$$

astfel că

$$\frac{d\xi_1}{dt}, \quad \frac{d\eta_1}{dt}, \quad \frac{d\zeta_1}{dt}$$

vor reprezenta proecţiile vectorului $\bar{v}$ al vitesei de antrenare, iar

$$\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2},$$

proecţiile vectorului $\bar{\gamma}$ al acceleraţii de antrenare, ale punctului (x, y, z) din sistemul antrenat, pe când evident

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \text{etc.}$$

Fie p, q, r componentele *vectorului-rotaţiune* $\bar{\omega}$ după cele trei direcţiuni Ox, Oy, Oz.

Vom avea pentru componentele vitesei liniare $\bar{v}$ (axa de rotaţie trecând prin origina O):

$$\frac{d\xi_1}{dt} = q\zeta_1 - r\eta_1$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = r\xi_1 - p\zeta_1$$

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = p\eta_1 - q\xi_1.$$

Aceste expresii se obţin, scriind că vectorul vitesei $\bar{v}$ este produsul geometric*) al vectorului $\bar{\omega}$ cu raza vectoare $\bar{R}$ a punctului (ξ_1, η_1, ζ_1) sau (x, y, z):

$$\bar{v} = [\bar{\omega}\,\bar{R}]$$

şi luând apoi componentele acestui produs.

*) Întrebuinţăm pentru produsul geometric notaţia germană $[\,]$, cel scalar fiind închis în paranteze $(\,)$, sau indicat prin'un punct sau chiar nimic.

Componentele acceleraţiei se obţin printr'o nouă derivare în raport cu timpul, care dă după cuvenitele înlocuiri:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{dq}{dt}z - \frac{dr}{dt}y + q(py - qx) - r(rx - pz)$$

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{dr}{dt}x - \frac{dp}{dt}z + r(qz - ry) - p(py - qx)$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{dp}{dt}y - \frac{dq}{dt}x + p(rx - pz) - q(qz - ry),$$

ultimele două expresii putându-se obţine din prima prin permutări circulare.

Dacă înlocuim acum derivatele $\frac{d\xi_1}{dt}$ ...., $\frac{d^2\xi_1}{dt^2}$ ...., prin notaţiile v_x, v_y, v_z şi γ_x, γ_y, γ_z, adoptate pentru proecţiile vectorilor $\overline{v}$ şi $\overline{\gamma}$ (relativi rotaţiunei de antrenare) şi întebuinţăm notaţia cu accent pentru restul de derivate în raport cu timpul, expresiile de mai sus devin:

$$v_x = qz - ry$$

$$v_y = rx - pz$$

$$v_z = py - qx$$

$$\gamma_x = -(q^2 + r^2)x - (r' - qp)y + (q' + rp)z$$

$$\gamma_y = -(r^2 + p^2)y - (p' - rq)z + (r' + pq)x$$

$$\gamma_z = -(p^2 + q^2)z - (q' - pr)x + (p'' + qr)y.$$

Exprimând relaţia între vectori:

$$\overline{F} = g' - \overline{\Gamma} - \gamma$$

în proecţie pe cele trei axe mobile, obţinem:

$$F_x = g_x - \Gamma_x + (q^2 + r^2)x + (r' - pq)y - (q' + pr)z$$

$$F_y = g_y - \Gamma_y + (r^2 + p^2)y + (p' - qr)z - (r' + qp)x$$

$$F_z = g_z - \Gamma_z + (p^2 + q^2)z + (q' - rp)x - (p' + rq)y.$$

b) *Condiţia generală a echilibrului relativ.*

Pentruca F_x, F_y, F_z să fie derivatele parţiale ale unei funcţiuni $f(x, y, z)$ în raport cu x, y, z, trebuesc îndeplinite cele trei condiţii:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{dx}, \text{ etc.}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum $p, q, r, g_x, \Gamma_x, \ldots$ etc sunt, în orice moment dat t, cantități comune tuturor punctelor sistemului de antrenare (deci constante față de variabilele x, y, z), condițiunile de mai sus se reduc la:

$$r' - pq = -r' - pq \qquad \text{etc,}$$

adică

$$r' = 0$$

și tot astfel

$$p' = 0$$

și

$$q' = 0.$$

O condiție primă, deci, pentru ca repausul relativ să fie realizabil, este ca *cele trei componente ale vitesei unghiulare instantanee a vasului să fie constante*, adică vectorul acestei viteze $\bar{\omega}$ (admis pentru calcul că trece prin origina axelor mobile) să fie constant ca mărime și direcție. Vasul trebue, așadar, să se învârtească *uniform* în jurul unei axe de direcție fixă, ce s'ar deplasa paralel cu ea însăși (cu vitesa de translație a originei alese pentru axele mobile).

Dacă vom alege una din axele antrenate, de exemplu pe Oz, orientată după această direcție fixă (cu care putem face să se aleagă paralel și axa ζ), vom avea permanent

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega$$

și formulele vor deveni:

$$F_x = (g_x - \Gamma_x) + \omega^2 x$$
$$F_y = (g_y - \Gamma_y) + \omega^2 y$$
$$F_z = (g_z - \Gamma_z),$$

unde $g_x, F_x, \ldots$ etc sunt în orice moment t aceleași pentru toate punctele sistemului, putând fi cel mult funcțiuni de timp. Introducând în ecuația mecanică (1) aceste valori ale componentelor intensității câmpului $\bar{F}$ al forței masice, și integrând o, obținem în cazul *lichidelor* integrala generală:

$$\frac{p}{\rho} = (g_x - \Gamma_x)\, x + \frac{\omega^2}{2} x^2 + (g_y - \Gamma_y y) + \frac{\omega^2}{2} y^2 + (g_z - \Gamma_z) z + \varphi(t). \quad (2)$$

In cazul *gazelor* în echilibru, primul membru al ecuației (2) trebue să fie înlocuit prin:

$$\int \frac{dp}{\rho} \quad \text{sau} \quad \int \frac{dp}{f(p)}$$

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu

$$\rho = f(p),$$

urmând să avem, la derivarea parţială în raport cu timpul:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial (g_x - \Gamma_x)}{\partial t} x + \frac{\partial (g_y - \Gamma_y)}{\partial t} y + \frac{\partial (g_z - \Gamma_z)}{\partial t} z + \varphi'(t),$$

unde $\frac{\partial p}{\partial t}$ trebue evident să fie nul.

La un *lichid incompresibil* în echilibru însă, $\frac{\partial p}{\partial t}$ (deşi $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) poate fi diferit de zero, întrucât presiunea în orice punct interior nu este indispensabil a fi constantă, cu excepţia punctelor suprafeţei libere, dacă există, de oare ce acolo presiunea este cu necesitate constantă. Când o asemenea suprafaţă nu există, adică în cazul unui lichid, închis într'un vas plin, dacă

$$g_x - \Gamma_x, \quad g_y - \Gamma_y \text{ şi } \quad g_z - \Gamma_z,$$

sunt constante, funcţia $\varphi'(t)$ fiind constantă sau variabilă cu timpul, se vede că variaţia lui p în unitatea de timp, fiind egală cu $\rho\varphi'(t)$, va fi independentă de x, y, z, adică se va face simultan şi cu acelaş cuantum în întreaga masă.

c) *Condiţiuni complementare la gaze şi la lichide cu suprafaţă liberă.*

Aşa dar, o altă necesitate impusă pentru întreaga masă în cazul vaselor antrenate pline cu gaz, iar în cazul vaselor cu lichid impusă numai pentru suprafaţa liberă a lichidului, neceeitate pentruca echilibrul să se poată menţine, este ca presiunea într'un punct al masei, respectiv al menţionatei suprafeţe, să rămână constantă, adică, în întinderea acelui spaţiu sau acelei suprafeţe să avem obligator

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

In cazul gazelor trebue să avem, aşadar, membrul al doilea din (2) constant cu timpul pentru orice punct (x, y, z), ceeace cere, drept condiţiuni complementare, ca coeficienţii lui x, y, z şi funcţia $\varphi(t)$ să fie constante.

Ori, pentruca $\bar{g}$ şi $\bar{\Gamma}$ să dea pe cele trei axe, din cari numai una este orientată fix, proecţiuni constante, trebue ca aceşti vectori să fie constanţi şi orientaţi după axa cu orientare fixă ($O\zeta$ sau

Oz). Cum $\bar{g}$ este vertical, aceasta atrage condiţia ca axa de rotaţie să fie în permanenţă verticală, ceeace atrage aceeaşi condiţie şi pentru $\bar{\Gamma}$.

In cazul unui vas conţinând *lichid cu suprafaţă liberă*, ecuaţia acesteia, care se obţine din (2) punând $p = p_0$ al suprafeţei libere, trebue să-şi aibă parametrii invariabili, pentru a reprezenta o suprafaţă fixă faţă de vas. Această condiţie impune, în cazul existenţei unei rotaţiuni, aceleaşi restricţiuni ca mai sus privitor la $\bar{g}$ şi $\bar{\Gamma}$, fiind însă în cazul $\omega = 0$ mai puţin restrictivă, precum vom vedea.

I. Aceste consideraţiuni conduc, mai întâi pentru *vasele pline cu gaz*, la distingerea a două categorii de mişcări de antrenare, cari permit echilibrul în anumite condiţiuni complementare.

α) Dacă mişcarea de antrenare este o *simplă translaţie* ($p = q = r = 0$), constanţa proecţiilor lui $\bar{g}$ este satisfăcută dela sine, căci axele mobile nu-şi schimbă orientarea. Condiţia care mai trebue satisfăcută este ca $\bar{\Gamma}$, adică acceleraţia translaţiei de antrenare, să fie de asemenea un vector *constant cu timpul*.

β) Dacă pe lângă translaţie avem şi rotaţie, trebue ca axa de rotaţie să fie şi să rămână paralelă cu $\bar{g}$ adică verticală, iar vectorul $\bar{\Gamma}$, dacă nu este nul, să aibe şi el aceeaşi direcţie şi să fie constant.

Aşadar, în rezumat, condiţia primă generală

$$p' = q' = r' = 0$$

fiind satisfăcută, repausul relativ în cazul *gazelor* nu este posibil decât pentru:

o simplă translaţie cu vector acceleraţie constant (sau nul);

o rotaţie uniformă $\bar{\omega}$ în jurul unor axe instantanee permanent verticale, combinată sau nu cu o mişcare de translaţie cu $\bar{\Gamma}$ constant şi vertical.

Când $\omega \neq 0$, pentruca formula (2) (pentru gaze trebuind a schimba membrul întâi în consecinţă), care presupune că axa $\bar{\omega}$ este orientată după axa Oz, să fie aplicabilă, trebue ca axa z a sistemului de referinţă a acestei formule să fie verticală.

II. S'a menţionat că, pentru *lichide cu suprafaţă liberă* condiţia $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ nu este indispensabilă decât la această suprafaţă, putându-se deci avea în interiorul masei $\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0$ (în cazul

unei mase în vas închis, complet plin, deci fără suprafață liberă, condiția la suprafață nu intervine, dispărând astfel orice condiție complementară). In cazul lichidelor cu suprafață liberă, condiția $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ pe această suprafață ($p = p_0$) și necesitatea ca suprafața liberă să fie invariabilă, par la prima vedere să fie mai puțin restrictive ca la gaze, unde *foaie* suprafețele de nivel trebuesc să rămână permanente față de vas, menținând fiecare presiunea ei p caracteristică, spre a nu se turbura echilibrul prin variația presiunei în interiorul masei. Totuși, în *prezența unei rotații* de antrenare (cazul β), se cere lui $\bar{g}$ și $\bar{\Gamma}$ pentru echilibrul relativ aceleași condițiuni ca cele cerute în cazul gazelor. Intradevăr, cum unul din coeficienții ecuației suprafeței libere (ecuația (2) cu $p = p_0$) și anume $\frac{\omega^2}{2}$ este constant, permanența suprafeței cere ca și ceilalți coeficienți să fie constanți, concomitent și cu termenul liber $\frac{p_0}{\rho} - \varphi(t)$ adică și cu functia $\varphi(t)$, exact ca mai sus în cazul gazelor.

Vom avea deci și aci de distins cele două feluri de antrenări α) și β), cu observațiunea însă că, dacă mișcarea de antrenare este numai translatoare (α), condițiunile devin mai puțin restrictive, după cum am anunțat mai sus, permanența suprafeței libere cerând constanță numai pentru *raporturile* dintre coeficienți, după cum se va preciza mai bine în exemplele ce urmează.

III. In fine, la vasele închise *pline cu lichid*, după cum s'a arătat și sub II, necesitatea $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ nu intervine, condiția primă $p = q = r = 0$ fiind suficientă pentru echilibrul relativ. In acest caz, fără nici o condiție complementară, ecuația integrată (2) dă repartiția presiunilor.

Și la vasele închise, complet pline cu lichid, ca și la vasele cu suprafață liberă, suntem conduși a cerceta forma suprafețelor de nivel sau *isobare* (adică cu p constant), precum și eventualalor deplasare față de vas. Această deplasare este compatibilă cu echilibrul, cu singura diferență că, la vasele închise complet pline nu există nici o restricție, pe când la vasele cu suprafață liberă avem restricția, numai pentru această suprafață izobară, că ea trebue să rămână fixă.

3 Lichid cu suprafață liberă într'un vas antrenat.

α). Să arătăm că, pentru asemenea vase, în cazul unei *simple translațiuni*, repausul relativ al lichidului conținut este posibil dacă vectorul acelerației este supus la o condiție mai puțin restrictivă decât de a fi constant și vertical, cum se cere în prezența și a unei rotațiuni sau în general în cazul gazelor. Intradevăr, acel vector va putea varia, cu singura restricțiune ca direcția vectorului rezultant F (pe care suprafața liberă plană este normală) să fie *invariabilă cu timpul*, (ceeace este necesar pentru constanța orientării acestei suprafețe), iar sensul și mărimea lui să fie astfel, ca lichidul să nu se despartă de vas (în care caz evident echilibrul se distruge).

De exemplu, pentru a da un *caz particular* simplu al problemei, o acceelerațiune *de translație variabilă dar permanent verticală și ascendentă* îndeplinește condiția menționată.

Fie axa $+z$ (același cu $+\zeta$) verticală ascendentă. Vom avea:

$$\frac{p}{\rho} = (g_z + \Gamma_z)\, z + \varphi(t)$$

sau, cum

$$g_z = -g$$

și

$$\Gamma_z = \Gamma:$$

$$\frac{p}{\rho} = -(g + \Gamma)\, z + \varphi(t), \qquad (1)$$

unde Γ poate fi funcție de t, deci variabil.

Într'un moment oarecare t, suprafețele de nivel ($p = const$) sunt planuri orizontale, parametrul lor variind cu timpul. Totuși, pentru suprafața liberă ($p = p_0$), parametrul va trebui să rămână același pentru orice valoare a lui t (repaosul relativ implicând invariabilitatea suprafeței libere), adică să avem:

$$\frac{\frac{p_0}{\rho} - \varphi(t)}{-(g+\Gamma)} = const.$$

Fie z_0 valoarea acestei constante, sau cota nivelului din vas.

Relația:

$$\frac{\frac{p_0}{\rho} - \varphi(t)}{-(g+\Gamma)} = z_0 \qquad (2)$$

arată că Γ poate fi orice funcție de t, căci $\varphi(t)$ este arbitrar, putându-se potrivi totdeauna astfel ca (2) să fie satisfăcut.

Din (1) și (2) rezultă:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = (\Gamma + g)(z_0 - z), \tag{3}$$

ecuație care, pentru orice valoare a lui Γ, dă evident $z = z_0$ odată cu $p = p_0$.

Totuși, după cum s'a menționat, o oarecare restricție pentru Γ este necesară, și anume *sensul* și *mărimea* lui vor trebui să fie astfel, ca lichidul să nu se despartă de vas, adică să existe peste tot o presiune ≥ 0.

Ecuația (3) se mai poate scrie, numind h adâncimea unei molecule sub suprafața liberă:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = (\Gamma + g)\, h.$$

Pentru $\Gamma > 0$ avem o sporire a presiunilor, exact cum ar rezulta printr'o intensificare fictivă a gravității (dela g la $\Gamma + g$).

Pentru valori negative (Γ descendent) ale accelerației, pe cari le vom însemna cu $-\Gamma$ (Γ fiind valoarea absolută), vom scrie:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + (g - \Gamma)\, h.$$

Dacă $\Gamma < g$, accelerația descendentă are efectul numai de a micșora câmpul, scăzându-se din g, însă presiunile hidrostatice cresc și atunci liniar *de sus în jos* (în direcția rezultantei F). Dacă $\Gamma = g$ (cum ar fi dacă vasul ar cădea liber, neglijând rezistența aerului) avem presiunea atmosferică în toată masa lichidului, care cade liber ca și în atmosferă, fără a fi susținut de vas. In fine, dacă $\Gamma > g$, avem în masă presiuni mai mici ca presiunea dela suprafață p_0, deoarece ele vor descrește cu adâncimea. Cât timp vom avea:

$$g < \Gamma < g + \frac{p_0}{\rho h}$$

pentru toate valorile lui h, aceste presiuni vor fi > 0 și vasul va fi solidar cu lichidul.

Dacă însă, Γ crescând, inegalitatea se transformă pentru vreun punct în egalitate, ceeace va începe evident pentru h_1, maximul lui h (fundul vasului):

$$\Gamma = g + \frac{p_0}{\rho h_1},$$

vom avea acolo:

$$p = 0$$

cu tendința de despărțire a lichidului de vas, astfel că lichidul va cădea ca în vid (produs sub el), fiind acționat concomitent de gravitate și de presiunea atmosferică dela suprafață. Ori cât ar mai crește dela acel moment accelerația descendentă a vasului, presiunea la fund nu va putea descrește sub 0 și lichidul va continua să cadă cu accelerația limită

$$g + \frac{p_0}{\rho h_1}$$

sub acțiunea gravității și a presiunei atmosferice de sus, până când, în cele din urmă, vasul (care va începe a cădea mai repede deoarece $\Gamma > g + \frac{\Gamma_0}{\rho h_1}$) se va despărți de lichid.

Această proprietate se utilizează la pompa primitivă cu vas cufundat în apă, prevăzut cu o supapă de fund; vasul este pus în mișcare alternativă rapidă în jos și în sus (Fig. 160).

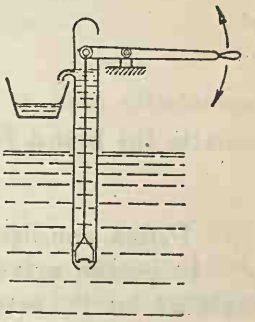


Fig. 160

Să luăm acum *cazul general* de translație (Fig. 161). Dacă vectorul $\bar{\Gamma}$ al accelerației translației are o altă direcție decât cea verticală, alegând planul vertical zx paralel cu acest vector, care formează cu orizontala $+x$ unghiul β, vom avea:

$$\frac{p}{\rho} = -\Gamma_x x - (g + \Gamma_z) z + \varphi(t)$$

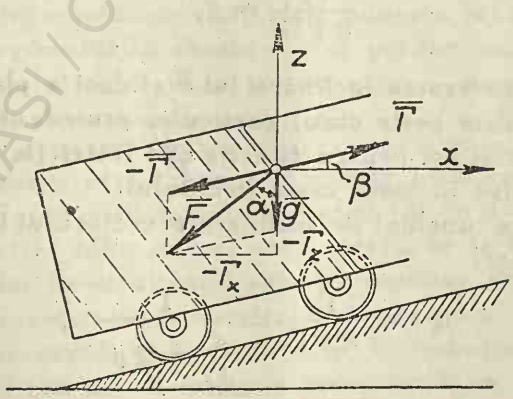


Fig. 161

unde:

$$\Gamma_x = \Gamma \cos \beta$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\Gamma_z = \Gamma \sin \beta.$$

Intr'un moment oarecare t, suprafeţele de nivel ($p = const$) sunt planuri perpendiculare pe $\overline{F}$ şi deci pe planul zx, înclinate faţă de axa $\vec{x}$ cu un unghiu α, astfel ca:

$$tg\,\alpha = \frac{\Gamma_x}{g+\Gamma_z}.$$

Pentru suprafaţa liberă, unde $p = p_0$, avem planul

$$\frac{p_0}{\rho} = -\Gamma_x x - (g + \Gamma_z) z + \varphi(t),$$

care, pentru a nu varia, cere două condiţiuni şi anume ca parametrii lui, în număr de doi, să rămână constanţi:

$$\frac{\frac{p_0}{\rho} - \varphi(t)}{-(g+\Gamma_z)} = C$$

şi

$$\frac{\Gamma_x}{g+\Gamma_z} = k = tg\,\alpha,$$

ecuaţia lui luând forma:

$$C = z + k x.$$

Prima condiţie arată că Γ_z poate să fie orice funcţie $f(t)$.

In ceeace priveşte componenta Γ_x, aceasta trebue să fie în legătură cu Γ_z prin a doua condiţie:

$$\frac{\Gamma_x}{g+\Gamma_z} = k,$$

care exprimă conservarea înclinărei lui $\overline{F}$ şi deci a planului de apă. Dacă $\Gamma_x = 0$, cădem peste cazul particular precedent.

Se impune şi aci pentru funcţia $\varphi(t)$ restricţia ca presiunile să rămână pozitive în toată masa lichidului.

Cum β este unghiul de înclinare a vectorului $\overline{\Gamma}$ faţă de orizontală, vom avea:

$$tg\,\alpha = \frac{\Gamma_x}{g+\Gamma_z} = \frac{1}{\frac{g}{\Gamma_z} + tg\,\beta},$$

iar dacă $\Gamma_x >>> g$, obţinem

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta \cong 1,$$

cu alte cuvinte, cu cât Γ_x este mai mare, cu atât mai mult suprafețele de nivel tind să devină aproximativ perpendiculare pe direcția acceleraţiei de antrenare. Aceasta se putea prevedea, întrucât acele suprafețe sunt riguros perpendiculare pe rezultanta $\bar{F}$, care, în ipoteza $\Gamma_x >>> g$, se apropie de $\bar{\Gamma}$.

Discuţia cazului general de translaţie a vasului dovedește clar că, pentru lichide cu suprafață liberă, repausul relativ impune în acest caz mai puține restricțiuni (decât în cazul rotaţiei sau în general pentru gaze), acceleraţia de translaţie *putând fi variabilă cu timpul*, cu singura condiţie ca direcţia rezultantei $\bar{F}$ să nu se schimbe (condiţie necesară pentru permanența planului liber, perpendicular pe $\bar{F}$) și ca lichidul să nu se despartă de vas.

Dacă $\Gamma = 0$, dăm peste un caz particular, acela al unei translaţiuni uniforme, care nu modifică întru nimic condiţiile repausului absolut. Într'adevăr, avem în acest caz:

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \varphi(t)$$

$$\frac{p_0}{\rho} = -gz_0 + \varphi(t)\ ;$$

ultima egalitate cerând evident $\varphi(t) = const$, și prin eliminarea lui $\varphi(t)$ regăsim ecuaţia repausului absolut:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = g(z_0 - z).$$

Ceeace precede privește menţinerea unui regim de repaus relativ, *presupus stabilit*. Dacă plecăm dela starea de repaus a vasului, fără a lua precauţiuni speciale (forţarea suprafeţei libere în noua ei poziţie) în intervalul de timp, dela punerea lui în mișcare până la atingerea regimului în chestune, se produc oscilaţiuni periodice ale lichidului de o parte și de alta a suprafeţeţei libere, corespunzătoare repausului relativ.

β). Dacă mișcarea de antrenare este o *rotaţie*, repetăm că, exact ca și pentru gaze, repausul relativ nu este posibil decât în cazul constanţei coeficienţilor ecuaţiei (2) cu $p = p_0$, precum și a funcţiunei $\varphi(t)$, adică numai dacă rotaţia se face în jurul unei axe verticale, iar în cazul când există simultan, și translaţie dacă și acceleraţia acesteia este verticală și constantă, eventual nulă.

Aşadar, în cazul β), vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{\Gamma}$ trebuind să fie verticali, ecuaţia (2) (cu axa z verticală ascendentă) se reduce la:

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - (g + \Gamma) z + C$$

sau

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 \frac{r^2}{2} - (g + \Gamma) z + C,$$

numind r depărtarea unei molecule de axa de rotaţie.

Aceasta va fi şi ecuaţia suprafeţelor de nivel pentru diferitele valori ale presiunei p. Suprafaţa liberă va avea ca ecuaţie:

$$\frac{p_0}{\rho} = \omega^2 \frac{r^2}{2} - (g + \Gamma) z + C.$$

Vedem că prezenţa lui Γ echivalează cu modificarea câmpului, care în loc de a fi g este $g + \Gamma$. De aceia, pentru simplitate vom presupune în cele ce urmează $\Gamma = 0$, scriind pentru acest caz:

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 \frac{r^2}{2} - gz + C. \qquad (1)$$

Aceasta este ecuaţia mecanică de *repartiţie a presiunilor* sau ecuaţia suprafeţelor de nivel, cari sunt paraboloizi de rotaţie. Pentru ecuaţia suprafeţei libere vom scrie:

$$\frac{p_0}{\rho} = \omega^2 \frac{r^2}{2} - gz + C. \qquad (2)$$

Dacă introducem în (2) ordonata z_0 a vârfului $r = 0$ al paraboloidului, constanta arbitrară C se elimină, de exemplu scăzând membru cu membru (2) din (1). Ecuaţia de repartiţie a presiunilor ia atunci forma

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{2} - g(z - z_0) \qquad (1')$$

sau

$$\frac{p - p_0}{\varpi} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0 - z,$$

iar ecuaţia suprafeţei libere $p = p_0$, forma simplă

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0, \qquad (2')$$

constanta z_0 având un sens determinat, fiind anume ordonata vârfului acestui paraboloid.

Aşadar, suprafeţele de nivel, cari se obţin dând lui p diferite valori (pentru suprafaţa liberă $p = p_0$), sunt paraboloizi de rotaţie în jurul axei z (cu raza de curbură la vârf $\frac{g}{\omega^2}$), identici

între ei ca formă și diferind numai ca poziție verticală. Această formă (vezi (2')) este independentă de ρ.

Exemple. Să luăm ca exemplu un vas cilindric vertical de secțiune circulară și cu fundul plan orizontal, în rotație uniformă în jurul axei sale de figură. Condiția inițială, ca volumul lichidului cuprins între fund și suprafața liberă din starea de repaus (de înălțime h) să fie conservat, conduce la relația:

$$2\int_0^R z\, r\, dr = R^2 h$$

sau prin (2')

$$z_0 + \frac{\omega^2}{4}\frac{R^2}{g} = h.$$

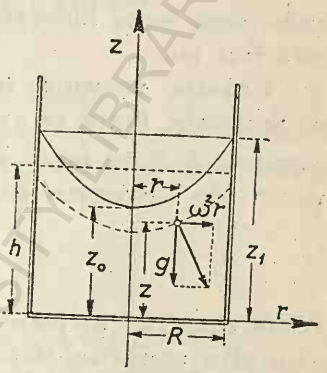


Fig. 162

Ecuația meridianei suprafeței libere din planul rOz, în care introducem această valoare a lui z_0, devine

$$\frac{\omega^2}{g}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = z - h.$$

Pentru $z = h$ găsim:

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

oricare ar fi ω și, deci, cercul tăiat în paraboloidul suprafeței libere de planul de apă inițial, este independent de ω, având ca rază $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Pentru $r = 0$ găsim:

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g},$$

iar pentru $r = R$ găsim:

$$z_1 = h + \frac{\omega^2 R^2}{4g},$$

rezultând:

$$\frac{z_0 + z_1}{2} = h.$$

Așadar, înălțarea lichidului la perete este egală cu scoborârea lui în axă.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă din ecuaţia (1') a unei suprafeţe de nivel scădem membru cu membru ecuaţia suprafeţei libere (2'), scrisă în z', obţinem:

$$\frac{p-p_0}{\varpi} = z' - z,$$

şi deci în sens vertical (pentru acelaşi r) presiunile sunt repartizate după legea hidrostatică, ceeace este explicabil, după cum se arată mai jos.

Ecuaţia mecanică în cazul rotaţiei uniforme în jurul unei axe verticale, luată ca axă z ascendentă, se poate stabili şi direct, compunând $\overline{g}$ cu forţa de inerţie, redusă la unitatea de masă, a mişcării de antrenare, adică cu acceleraţia centrifugă:

$$\frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Graţie simetriei în jurul axei z ne putem mărgini la studiul într'un plan meridian rOz (Fig. 163). Vom avea în proecţie pe axa orizontală r, respectiv pe cea verticală z, următoarele ecuaţiuni diferenţiale:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \omega^2 r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 &= g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Se poate spune că forţa de inerţie, fiind orizontală, nu schimbă în sens vertical condiţiile de echilibru, adică repartiţia hidrostatică din repausul absolut. De altfel, se va demonstra în hidrodinamica curenţilor că, în mişcare absolută, la curentul circular format astfel, acceleraţia fiind după normala principală a traiectoriei şi neexistând deci nici o acceleraţie în direcţia binormalei (care aci este direcţia verticală), vom avea ca totdeauna în această direcţie rapartiţia hidrostatică a presiunilor.

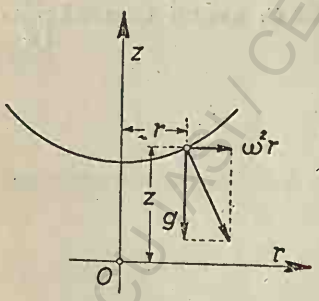


Fig. 163

Inmulţind prima ecuaţie cu dr, a doua cu dz şi adunând, obţinem ecuaţia (1) sub formă diferenţială:

$$\frac{dp}{\rho} = \omega^2 r dr - g dz,$$

In fine, o altă cale de a obţine această ecuaţie este de a porni direct dela ecuaţia diferenţială generală a hidrostaticei;

$$\frac{dp}{\rho} + dU = 0 ,$$

introducând în dU, pe lângă diferenţiala gdz a potenţialului gravităţei şi pe aceia a potenţialului $-\omega^2 r dr$ al forţei centrifuge.

Suprafeţele de nivel sunt în fiecare punct normale pe rezultanta $\overline{F}$ a forţelor de câmp $\overline{g}$ şi $\overline{\omega^2 r}$, a cărei valoare

$$F = \sqrt{g^2 + \omega^4 r^2}$$

este cu atât mai mare, cu cât ω este mai mare.

O moleculă aflată la distanţa r de axă se găseşte, aşadar, în aceleaşi condiţiuni ca şi când intensitatea gravităţei ar fi crescută în raportul:

$$\frac{F}{g} = \sqrt{1 + \frac{\omega^4 r^2}{g^2}}$$

şi orientată după normala suprafeţei de nivel respective.

In Hidrostatică, dacă un corpuscul de un volum V şi o greutate volumică ϖ_0 este la un moment dat înconjurat de lichid cu $\varpi < \varpi_0$, rezultanta $(\varpi_0 - \varpi) V$ a greutăţii proprii şi a subpresiunei imprimă corpusculului în chestiune o deplasare prin mediul înconjurător în direcţia gravitaţiunei.

Or, expresia acestei rezultante $g(\rho_0 - \rho) V$ arată, că ea va fi cu atât mai mare, cu cât în locul lui g vom avea o intensitate de câmp mai mare, ceeace se obţine prin *centrifugare*. Această operaţie constituie, aşadar, un mijloc practic pentru a mări efortul de despărţire al moleculelor mai dense din mediul înconjurător mai puţin dens, efect echivalent cu acela ce s'ar obţine în câmpul gravităţii g printr'o sporire, în aceiaşi proporţie, a densităţilor ρ_0 şi ρ.

Pe acest principiu se bazează diferite maşini industriale, constând în esenţă dintr'un vas numit *turbină*, în care se toarnă lichidul pentru a se supune unei mişcări de rotaţie. Această operaţie, numită *turbinaj*, are de scop a despărţi mai rapid din lichid extrase de diferite densităţi. Ea se întrebuinţează în special la fabricarea untului prin *separatoare*, la filtrarea apelor sau lichidelor industriale, la separarea cristalelor zahărului din lichidul mumă, etc..

Cum prin turbinaj moleculele de diferite densităţi se aşează după paraboloizi de nivel, în ordinea densităţilor crescânde dela axă spre exterior, dacă se face un orificiu în dreptul unei anumite suprafeţe de nivel, se va putea culege lichid de o anumită densitate.

Înălțarea lichidelor în spre exterior prin centrifugare a găsit deasemenea aplcație la o mașină pentru ridicat apă.

In fine, dependința lui z_1 și z_0 de ω se utilizează uneori la aparate pentru măsurat numărul de învârtituri (contori de ture) ale unei osii rotitoare.

4. Vas închis antrenat, complet plin cu lichid.

Aci nu avem restricția relativă la invariabilitatea suprafețelor libere, astfel că, dacă condiția primă:

$$p' = q' = r' = 0$$

este indeplinită, adică ω este constant, repausul relativ este posibil și ecuația mecanică integrată dă în orice moment repartiția lui p în întreaga masă lichidă.

Ecuația mecanică generală arată că, în cazul mai simplu al unei translațiuni a vasului, suprafețele de nivel sunt planuri, în celelalte cazuri fiind suprafețe de gradul al doilea, a căror poziție relativă față de vas, în general, se modifică în timpul mișcării.

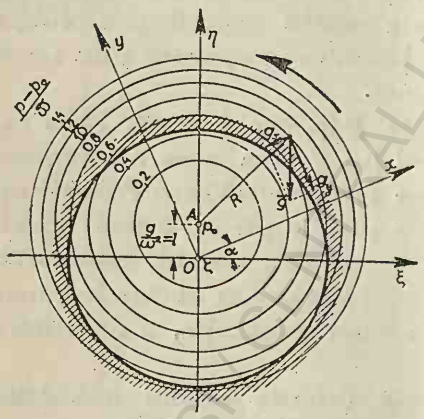


Fig. 164

Așadar, suprafele de nivel nu sunt ca în cazurile precedente legate de molecule, ci la fiecare din ele presiunea variază cu timpul. Repausul relativ este totuși asigurat grație reacțiunei pereților care se desvoltă în consecință, variind astfel în fiece punct în timpul mișcării.

De importanță practică este rotația în jurul unei axe fixe orizontale. Să luăm, ca și mai înainte, axa de rotație ca axă ζ și z, figura reprezentând planul $\xi O\eta$ și xOy, în care axa mobilă Ox formează în momentul t unghiul α cu axa fixă $O\xi$.

Admitem și aci

$$\Gamma = 0$$

și avem, după axele alese:

$$g_x = -g \sin \alpha$$

$$g_y = -g \cos \alpha$$

$$g_z = 0$$

şi

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = 0$$
$$\omega_z = \omega = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Ecuaţia mecanică generală în asemenea condiţii ia forma

$$\frac{p}{\rho} = -g \sin\alpha\, x + \omega^2 \frac{x^2}{2} - g\cos\alpha\, y + \omega^2 \frac{y^2}{2} + \varphi(t).$$

Pentru a trece la sistemul de coordonate fixe, ne folosim de relaţiile între coordonatele după cele două sisteme de axe:

$$\eta = x \sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

cu ajutorul cărora ecuaţia se transformă în:

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{\omega^2}{2g}\xi^2 + \frac{\omega^2}{2g}\eta^2 - \eta + f(t) = \frac{\omega^2}{2g}\left[\xi^2 + \left(\eta - \frac{g}{\omega^2}\right)^2\right] - \frac{g}{2\omega^2} + f(t).$$

Într'un moment oarecare t, atribuind lui p diverse valori constante, obţinem suprafeţe de nivel, cari sunt cilindri coaxiali, având axa lor comună paralelă cu axa orizontală $O\zeta$ şi aşezată la înălţimea:

$$OA = \frac{g}{\omega^2}$$

deasupra acestei axe.

Numind p_0 presiunea în acel moment din axa comună A a acestor cilindri, şi introducând în ecuaţia de mai sus coordonatele lui A:

$$\xi_0 = 0$$
$$\eta_0 = \frac{g}{\omega^2},$$

obţinem

$$\frac{p_0}{\varpi} = -\frac{g}{2\omega^2} + f(t),$$

ceeace arată că presiunea p_0 din A poate fi o funcţiune arbitrară de timp. Şi întradevăr, putem realiza aceasta, dacă punem pe A în legătură cu un rezervor, în care facem să varieze nivelul de apă în mod arbitrar.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin scăderea ultimei relații, membru cu membru, din ecuația generală, aceasta ia forma

$$\frac{2g}{\omega^2}\left(\frac{p-p_0}{\varpi}\right)=\xi^2+\left(\eta-\frac{g}{\omega^2}\right)^2=R^2$$

unde p_0 poate fi, precum am spus, o funcție arbitrară de t, dar pe care o vom presupune, în cazul cel mai simplu, constantă.

De aci se deduc razele R ale suprafețelor cilindrice de nivel:

$$R=\frac{1}{\omega}\sqrt{2g\,\frac{p-p_0}{\varpi}},$$

dând lui p diferite valori constante.

Aceste raze sunt, așadar, proporționale cu rădăcinile pătrate ale suprapresiunilor față de presiunea p_0.

Figura 164 arată poziția suprafețelor de nivel, punând în evidență faptul că, la învârtirea în jurul axei orizontale $O\zeta$, presiunea în diferitele puncte ale peretelui vasului, chiar în ipoteza în care ne-am așezat: $p_0 = const$, variază în fiecare moment, fiindcă orice moleculă trece prin diverse suprafețe de nivel, acestea nefiind fixe față de vas ci fixe în spațiu.

La studiul roții cu găleți (vase deschise, deci cu suprafață liberă) se admite că suprafețele de nivel (printre cari și suprafețele libere din găleți, fixate la distanțe egale pe periferia roții) sunt aproximativ cilindrice, conform teoriei de mai sus (presupunând că aceasta s'ar aplica și aci aproximativ), având axă comună. Aplicarea teoriei expuse nu este riguroasă, deoarece, la învârtirea în jurul unei axe orizontale, am demonstrat că nu poate exista repaus relativ pentru apa din gălețile *deschise*. Totuși, în caz *de vitese unghiulare mici*, se poate admite cu oarecare aproximație că suprafețele libere ar fi fixe, avându-și axa la înălțimea foarte mare $\frac{g}{\omega^2}$ deasupra axei de învârtire; rezultatele obținute astfel sunt suficient de exacte în practică, de exemplu pentru determinarea aproximativă a poziției găleții, la care începe deversarea.

Și cazul rotațiunei în jurul unei axe orizontale se poate studia direct, de exemplu grafic, construind, în planul normal pe axă și care trece prin molecula unitară M considerată (Fig 165), rezultanta forțelor aplicate pe aceasta. Molecula va fi solicitată de rezultanta elastică, de forța reală $\overline{g}$ și de forța de inerție (centrifugă) $\overline{\omega^2 r}$, îndreptată după prelungirea razei OM. Rezultanta $\overline{F}$ a acestor două forțe din urmă, în caz de repaus relativ, va echi-

libra, rezultanta elastică, orientată normal pe suprafaţa de nivel ce trece prin M.

O proprietate geometrică a figurei permite a se găsi imediat forma secţiunei unei asemenea suprafeţe în planul figurei.

Prelungind pe DM până când taie în A verticala lui O, avem:

$$\frac{OA}{CD} = \frac{OM}{MC},$$

de unde:

$$OA = \frac{gr}{\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2},$$

astfel că poziţia lui A este independentă de aceea a moleculei M în planul figurei. Linia de nivel prin M, a cărei normală în M trece printr'un punct fix A, independent de poziţia punctului M, aleasă în lungul acestei linii, nu poate fi decât o circumferinţă. Rezultă că suprafeţele de nivel sunt cilindri circulari coaxiali, având axa lor orizontală paralelă cu axa de rotaţie şi aşezată exact deasupra acesteia la înălţimea $AO = g/\omega^2$.

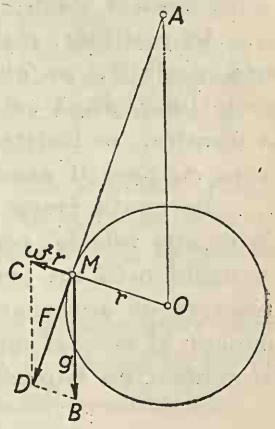


Fig. 165

Când vitesa este foarte mare, AO devine foarte mic (A se coboară, apropiindu-se de O) şi aceasta explică dece, învârtind destul de repede, ca o praştie, o găleată cu apă ce şi-ar avea fundul perpendicular pe OM şi îndreptat în afară, lichidul nu se varsă.

Este evident că atunci, în poziţia cea mai defavorabilă, când găleata se găseşte sus pe verticala lui O, punctul A dela care forţa F se îndreaptă spre molecule, se găseşte sub suprafaţa liberă (concavă), în care caz moleculele sunt centrifugate din spre A spre fundul şi pereţii găleţei. Pentru ca în această poziţie să poată rămâne în găleată o cantitate cât de mică de lichid, trebue să avem

$$OA = \frac{g}{\omega^2} < r_f$$

unde r_f este depărtarea lui O de fundul găleţei. Dacă presupunem găleata foarte mică, redusă la centrul ei de greutate şi legată de axa O printr'un fir flexibil, condiţia $\frac{g}{\omega^2} < r_f$ (r_f ar fi atunci aproximativ depărtarea lui O de centrul de greutate al

masei m centrifugate, sau lungimea firului) este cea cerută pentruca firul să fie întins. Intradevăr, în poziția critică menționată va trebui ca forța centrifugă $m\omega^2 r_f$ să fie mai mare ca greutatea mg a masei. In cazul masei fluide din găleată, această condiție trebue evident îndeplinită de fiecare moleculă în parte, în special de aceea a suprafeței libere depe verticala lui O, care reprezintă cazul cel mai defavorabil pentru r, definit la început ca r_f pentru fund.

Faptul că repausul relativ nu poate să existe riguros în vase cu suprafață liberă de apă, cari se învârtesc în jurul unei axe orizontale, devine evident, observând că axa de figură A a unei asemenea suprafețe libere, presupusă fixă, nu coincide cu axa de rotație O.

Notă. In toate cazurile precedente starea de repaus relativ, admisă ca posibilă, s'a considerat ca fiind a priori stabilită, studiul făcut mărginindu-se numai la condițiile necesare pentru menținerea acestei stări.

In realitate, stabilirea repaosului relativ, când existența lui este posibilă, se obține numai după un timp mai mult sau mai puțin lung, după ce ocilațiunile periodice ale lichidului, amorsate la pornire, se liniștesc (*amortizează*) prin viscozitate și prin frecarea cu pereții vasului.

Se poate trece însă mai repede din repausul absolut la starea de repaus relativ, realizând prealabil închiderea ermetică a vasului cu lichid prin un perete în forma suprafeței libere, compatibilă cu mișcarea de antrenare, aceasta până la atingerea regimului permanent al acestei mișcări, după care se înlătură partea peretelui în contact cu suprafața liberă.

5. Corpuri plutitoare în repaus relativ.

In cazul când un corp plutește pe un lichid aflat în repaus relativ, de exemplu într'un vas antrenat, dacă mișcarea vasului este o translație uniform accelerată (suprafața lichidului fiind atunci, după cum s'a arătat, un plan înclinat), studiul echilibrului și stabilității se reduce la acela din cazul repausului absolut într'un câmp uniform, a cărui intensitate însă, pe direcția căreia suprafețele de nivel sunt normale, în loc de a fi vectorul $\bar{g}$, este vectorul rezultant:

$$\bar{F} = \bar{g} - \bar{\Gamma}.$$

Intr'un asemenea câmp, pentru echilibrul corpului plutitor

va trebui ca subpresiunea $\bar{P}$, aplicată acestuia din partea apei, să fie egală și de semn contrar cu rezultanta celorlalte forțe ce solicită corpul și în direcția ei. Această rezultantă este greutatea fictivă a corpului în noul câmp, care pentru o masă m este

$$m\bar{F} = m(\bar{g} - \bar{\Gamma}).$$

Linia comună de acțiune a celor două forțe $\bar{P}$ și $m\bar{F}$ va conține evident centrele de greutate G și C ale plutitorului și carenei.

Cum greutatea fictivă a masei m' de lichid deplasat este și ea de forma

$$m'\bar{F} = m'(\bar{g} - \bar{\Gamma}),$$

printr'un raționament identic cu cel întrebuințat la studiul echilibrului absolut, adică presupunând plutitorul îndepărtat, cu complectarea spațiului carenei prin același lichid, se vede că greutatea $m'\bar{F}$ va fi egală și de sens contrar cu subpresiunea $\bar{P}$: rezultă egalitatea $m = m'$, adică identitatea carenei din cazul repausului absolut. In asemenea condițiuni G și C, axele de plutire, planurile de plutire, metacentrele, etc, sunt toate aceleași ca în repausul absolut.

In cazul unui lichid *rotitor în jurul unei axe verticale*, condițiunile de stabilitate pentru corpul plutitor se schimbă evident față de acelea din repausul absolut și se poate arăta că, în general, echilibrul este imposibil.

Intradevăr, în acest caz câmpul $\bar{F}$, compus din câmpul vertical $\bar{g}$ și câmpul orizontal al forței centrifuge $\omega^2\bar{r}$, variază în fiecare punct al sistemului antrenat, din cauza variației vectorului $\bar{r}$ ca mărime și direcție. Cele două centre de aplicație, al greutății fictive a plutitorului și al subpresiunei (antagoniste greutății fictive a apei dislocuite), vor fi altele decât acelea din repausul absolut, iar forțele respective aplicate în aceste centre, din cauza variației câmpului, vor diferi una de alta.

Problema fiind mai complicată, să examinăm separat, pe deoparte echilibrul și stabilitatea în sens vertical sub acțiunea câmpului $\bar{g}$, iar pe de altă parte în sens orizontal sub acțiunea câmpului $\omega^2\bar{r}$.

Considerarea echilibrului numai în câmpul $\bar{g}$ conduce evident și aci la egalitatea masei plutitorului și a lichidului dislocuit, centrele G și C fiind aceleași ca în repausul absolut. Câmpul

$\omega^2 \bar{r}$ însă, aplicat fiecărei molecule, radiind din axa de învârtire şi crescând liniar în raport cu depărtarea de această axă, centrele respective G' şi C' ale plutitorului şi apei dislocuite vor fi împinse mai în afară, adică dincolo de G şi C, respectiv. Dar să presupunem pentru simplitate că, graţie dimensiunilor relativ mici ale corpului, G coincide cu G' şi C cu C' şi că plutitorul ar pluti cu axa sa normală de plutire GC în direcţia vectorului mediu $\bar{F}$*), păstrându-se acelaş plan de plutire (de fapt o suprafaţă paraboloidă) ca şi în repaus absolut, în acord şi cu egalitatea $m = m'$.

Se poate uşor arăta că o asemenea poziţie nu poate fi o poziţie de echilibru în sens orizontal, decât dacă cele două centre C şi G coincid.

Intradevăr, admiţând aproximativ că media vectorului $\bar{F}$ pentru o masă limitată ar fi $\bar{F}$ din centrul de aplicaţie al rezultantei, echilibrul relativ în toate sensurile, adică pentru totalitatea forţelor, cere ca rezultanta

$$P_C = -m\bar{g} - m\omega^2 \bar{r}_C$$

a presiunilor asupra corpului, aplicată în C şi a cărei valoare este:

$$P_C = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2_C},$$

să fie egală şi direct opusă cu rezultanta

$$m\bar{F}_G = m\bar{g} + m\omega^2 \bar{r}_G$$

de valoare scalară

$$mF_G = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2_G},$$

a forţelor masice aplicate asupra plutitorului în baricentrul său G la distanţa r_G de axă.

Cum cele două forţe $m\bar{F}_G$ şi $\bar{P}_C$ trebue, pentru echilibru, să aibă şi aceeaşi dreaptă de acţiune GC, orientată aproximativ, precum am şi admis, în direcţia medie a câmpului $\bar{F}$, această dreaptă nefiind în general verticală ci inclinată vom avea $r_G \neq r_C$.

Singura poziţie, deci, pentru care cele două forţe ar putea realmente fi egale, este aceea din vârful paraboloidului suprafeţei libere, unde, direcţia $\bar{F}$ fiind verticală, avem intradevăr $r_G = r_C = 0$.

*) Liniile de forţă, în loc de a fi drepte, sunt curbe logaritmice, după cum se arată în o aplicaţie ce urmează. Resultă că direcţiile câmpului în punctele C şi G diferă cu atât mai mult, cu cât acestea ar fi mai departe unul de altul.

In orice altă poziție ar fi neegale din cauza inegalității $r_G \neq r_C$.

Dacă de exemplu corpul este omogen sau este vorba de un vas navigabil, centrul de gravitate G va fi deasupra lui C și deci mai aproape de axă, astfel că, admițând egalitatea componentelor verticale ($gm = gm'$) care implică $m = m'$, componenta orizontală a ansamblului presiunilor P_x (antagonista forței axifuge), aplicată în C, ar fi mai mare ca forța axifugă aplicată în G și corpul s'ar apropia de vârful paraboloidului, singura poziție de echilibru, care, în consecință, va fi o poziție de echilibru stabil. Aceasta explică pericolul la care sunt expuse navele surprinse de vârtejurile marine, ca acele ce se formează în nordul Norvegiei (*Mälström*, lângă insulele *Lofodfen*).

Din contra, un corp lestat (încărcat), având centrul său de greutate sub C, la cea mai mică inclinare va fi îndepărtat din ce înce mai mult de axă, adică de unica poziție de echilibru posibil, care ar fi prin urmare o poziție de echilibru *nestabil*.

In realitate, fenomenul se complică cu oscilațiuni verticale, provocate de variațiuni de carenă ($m \neq m'$) și cu oscilațiuni de rotație.

Aplicația Nr. 49. Un vas cilindric închis, de înălțime H și rază R, este plin cu lichid pe trei sferturi din înălțime. Să se găsească vitesa unghiulară cu care trebue învârtit vasul în jurul axei sale, pentru ca paraboloidul suprafeței libere a lichidului să atingă tangențial fundul.

Soluție. Fie r_1 raza paralelului superior al paraboloidului, pe care ne-o dă imediat ecuația meridianei:

$$r_1^2 = \frac{2g}{\omega^2} H. \qquad (1)$$

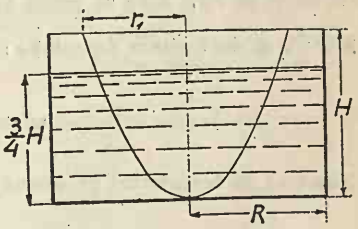


Fig. 166

Volumul paraboloidului, care formează golul în vas, fiind, precum se știe, egal cu jumătatea cilindrului de aceeași rază r_1 și aceeași înălțime H, vom avea, exprimând egalitatea volumului apei în starea inițială a echilibrului absolut cu acela din starea echilibrului relativ:

$$\frac{3}{4} H \pi R^2 = H \pi R^2 - \frac{1}{2} H \pi r_1^2 \qquad (2)$$

și înlocuind pe r prin (1),

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{gH}.$$

Aplicația Nr. 50. Intr'un vas analog ca mai sus cu $H = 0{,}20\,m$ și $R = 0{,}5\,m$ se găsește lichid la o înălțime $h = 0{,}05\,m$. Se cere a se găsi numărul de învârtituri pe minut n, pentruca raportul dintre razele cercurilor paralele extreme ale parabloloidului suprafeței libere să fie

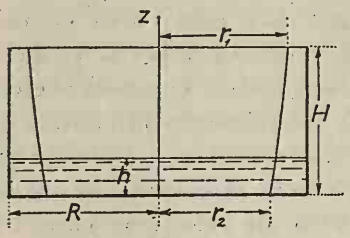


Fig. 167

$$\frac{r_1}{r_2} = d = 1{,}01,$$

în care caz suprafața liberă se prezintă aproximativ cilindrică.

Soluție. Volumul V al paraboloidului care reprezintă golul (ecuația meridianei față de tangenta la vârf fiind $r^2 = 2pz$ cu $p = \frac{g}{\omega^2}$) este

$$V = \int_{r_2}^{r_1} \pi r^2 dz = \frac{\pi}{p} \int_{r_2}^{r_1} r^3 dr = \frac{\pi}{4} \left[\frac{r_1^4 - r_2^4}{p} \right] = \frac{\pi}{4p} r_2^4 (d^2 - 1)(d^2 + 1),$$

expresie care, ținând seamă că :

$$r_2^2 (d^2 - 1) = r_1^2 - r_2^2 = 2p (z_1 - z_2) = 2p H, \qquad (1)$$

devine :

$$V = \frac{\pi H}{2} r_2^2 (d+1).$$

Exprimând egalitatea volumului lichidului în repaus obsolut și relativ

$$\pi R^2 h = \pi R^2 H - \frac{\pi H}{2} r_2^2 (d^2 + 1),$$

obținem pe r_2^2, care se poate astfel elimina din (1), pentru a ne da parametrul $p = \frac{g}{\omega^2}$ și deci vitesa de rotație :

$$\omega^2 = \frac{g H^2 (d^2 + 1)}{R^2 (H - h)(d^2 - 1)}.$$

Numărul de învârtituri pe minut va fi

$$n = 60 \frac{\omega}{2\pi}.$$

Pentru $d = 1.01$ *găsim* $n = 309{,}65$.

Aplicația Nr. 51. Un vas hemisferic de rază r, cu marginea orizontală (axa deci verticală), este compet plin cu lichid. Să se găsească cantitatea ce se va deversa din vas, dacă acesta ar fi supus unei rotiri cu vitesa unghiulară ω în jurul axei sale verticale.

Soluție. Fie S săgeata depresiunei nivelului la mijloc (cota vârfului paraboloidului față de planul marginei).

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Vom avea

$$r^2 = 2\frac{g}{\omega^2} S,$$

iar golul paraboloidului (jumătatea cilindrului circumscris), format în hemisferă va fi:

$$\frac{1}{2}\pi r^2 S = \frac{\pi r^4 \omega^2}{4g},$$

reprezintând și volumul de lichid deversat.

Aplicația Nr. 52 Un vas închis complet plin cu lichid, se învârtește cu o viteză de rotație constantă ω în jurul unei axe z, care formează cu verticala V unghiul α. Să se determine suprafețele de nivel.

Soluție. Luăm axele dreptunghiulare x, y și z astfel ca planul zx să fie vertical; axa y va rezulta orizontală. Pentru echilibrul oricărei molecule (x, y, z) cu longitudinea φ vom avea de considerat următoarele componente, după cele trei axe ale câmpului F din repausul relativ:

$$F_x = \omega^2 r \cos\varphi + g \sin\alpha = \omega^2 x + g \sin\alpha$$

$$F_y = \omega^2 r \sin\varphi = \omega^2 y$$

$$F_z = -g \cos\alpha,$$

astfel că ecuația diferențială a suprafețelor de nivel va fi:

$$(\omega^2 x + g \sin\alpha)dx + \omega^2 y\, dy - g \cos\alpha\, dz = 0,$$

iar după integrare (grupând termenii în x într'un pătrat):

$$\left(\omega x + \frac{g \sin\alpha}{\omega}\right)^2 + \omega^2 y^2 = 2g z \cos\alpha + C.$$

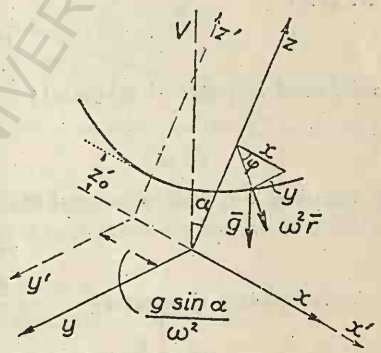


Fig. 163

Deplasând axa de coordonate z paralel cu ea însăși în planul zx, cu cantitatea $\frac{g \sin\alpha}{\omega^2}$, astfel ca noile coordonate să fie

$$x' = x + \frac{g \sin\alpha}{\omega} \qquad y' = y \quad z' = z,$$

(ceeace corespunde cu o ridicare verticală a axei z cu $\frac{g}{\omega^2}$) ecuația se simplifică devenind:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{2g \cos\alpha}{\omega^2}(z' - z_0').$$

Ea reprezintă paraboloizi de revoluție identici în jurul axei noui z', având ca parametru comun $\frac{g \cos\alpha}{\omega^2}$. Când z tinde să devie orizontal, parametrul tinde

către O şi diferitele parabole meridiane tind a deveni perechi de drepte orizontale; paraboloizii se transformă în cilindri, rezultat cunoscut, găsit pe altă cale.

Aplicaţia Nr. 53. O axă verticală poartă un braţ orizontal la capătul căruia este fixată o găleată plină cu apă, inclinată sub unghiul φ. Găleata şi braţul se învârtesc solidar în jurul axei cu vitesa unghiulară ω. Să se afle unghiul φ sub care, la vitesa arătată, găleata s'ar goli complet.

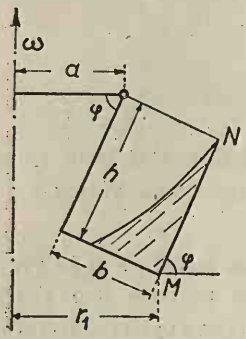


Fig. 169

Soluţie. Dacă în timpul când vasul este în mişcare, am putea micşora treptat unghiul φ, limita când lichidul se goleşte complet va fi atinsă în momentul când paraboloidul de revoluţie al suprafeţei de nivel, trecând prin M, va fi tangent la peretele găleţei.

Depărtarea lui M de axă este:

$$r = a - h\cos\varphi + b\sin\varphi$$

şi cum ecuaţia parabolei, care reprezintă meridiana suprafeţei libere, raportată la axa verticală şi la tangenta la vârf este:

$$r^2 = 2\frac{g}{\omega^2}z,$$

coeficientul ungiular al tangentei:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

va trebui să fie, pentru punctul M:

$$\frac{\omega^2 r_1}{g} = tg\,\varphi,$$

rezultând pentru φ ecuaţia:

$$\frac{g}{\omega^2}tg\,\varphi + h\cos\varphi - b\sin\varphi - a = 0.$$

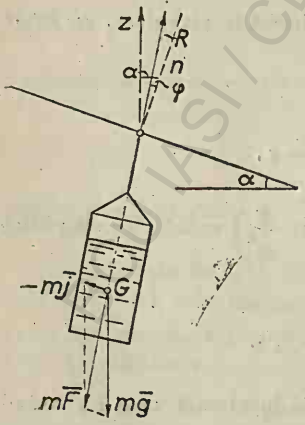


Fig. 170

Aplicaţia Nr. 54. Un vas plin cu lichid alunecă pe o bară înclinată cu $\sphericalangle\,\alpha$ faţă de orizontală. Să se găsească înclinarea suprafeţei libere în timpul mişcărei vasului, ştiind că coeficientul de frecare între bară şi suspensiunea vasului este $f = tg\,\varphi$.

Ce influenţă ar avea scurgerea lichidului printr'un orificiu de fund?

Soluţie. Vasul alunecă cu o acceleraţie

$$j = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

independentă de masa mişcată, deci şi de presenţa orificiului menţionat. Orice moleculă de masă $= 1$ va fi supusă forţelor g şi j, a căror rezultantă F va fi normală pe suprafeţele de nivel. Ori, dacă m este masa găleţei, inclusiv vasul, şi G centrul de

greutate al ansamblului, greutatea mg și forța de inerție mj aplicată în G se vor echilibra cu reacțiunea R a barei. Rezultă că această reacțiune, care formează unghiul φ de frecare cu normala n pe bară (formând deci unghiul $\alpha - \varphi$ cu verticala), va avea direcțiunea lui $-\overline{F}$ și același linie de acțiune. Inclinația lui F față de verticală fiind astfel $\alpha - \varphi$, rezultă că planurile de nivel vor fi inclinate și ele pe orizont cu $\alpha - \varphi$.

In cazul când apa ar curge prin orificiu, punctul G s'ar deplasa față de vas, rămânând mereu pe direcția R ce trece prin suspensie și pe care planul de apă va rămâne mereu perpendicular.

Aplicația Nr. 55. Pe o cale inclinată se mișcă două bazine ecluze de greutate G fiecare, acela care se coboară purtând în plus o greutate Q de apă motoare. A se găsi unghiul de inclinare φ al planului de apă față de orizont.

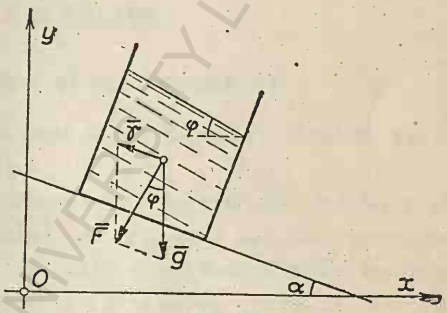


Fig. 171

Soluție. Accelerația mișcării va fi evident:

$$j = g\frac{Q}{2G+Q}\sin\alpha.$$

Rezultanta $\overline{F}$ a lui $\overline{j}$ și a lui $\overline{g}$ are drept componente orizontală și verticală

$$F_x = j\cos\alpha \quad \text{și} \quad F_y = gj\sin\alpha.$$

Raportul acestor componente dă tangenta unghiului de inclinație φ a lui $\overline{F}$ față de verticală, unghiu care reprezintă în același timp și înclinarea planurilor de nivel față de orizont:

$$tg\,\varphi = \frac{F_x}{F_y} = \frac{Q\sin\alpha\cos\alpha}{2G+Q\cos^2\alpha}.$$

Aplicația Nr. 56. Să se găsească ecuația liniilor de forță (ortogonale cu suprafețele de nivel) dintr'un lichid ce se învârtește în jurul unei axe verticale cu o vitesă uniformă ω.

Soluție. Din ecuația în coordonate r, z ale curbei meridiane, cu vârful la cota z_0 deasupra originei:

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - z_0),$$

scoatem mai întâiu coeficientul unghiular față de axa r:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2}{g}r.$$

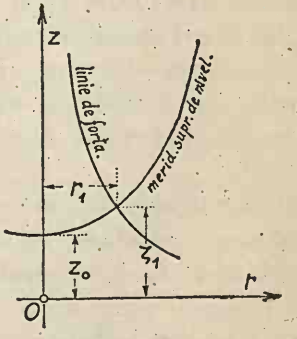


Fig. 172

Liniile de forță au tangente ortogonale cu meridianele; fie ζ ordonata unei asemenea linii pentru același r; vom avea:

$$\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{dr}{dz} = -\frac{\omega^2}{g}\frac{1}{r}.$$

Integrarea dă:

$$\zeta = C - \frac{\omega^2}{g} Log\, r.$$

Dacă se dă punctul r_1, ζ_1, pe unde trebue să treacă linia de forță, constanta C este determinată.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. XI.

STATICA GAZELOR.

1. Presiunea gazelor și măsurarea ei.

Din toate gazele interesează mai mult în acest studiu aerul și în mod accesoriu vaporii de apă.

La gaze orice moleculă se ciocnește mereu cu celelalte și, din când în când, cu pereții vasului, exercitând asupra acestora, conform legilor șocului elastic, o forță care depinde de masa și vitesa moleculei. Datorită numărului extrem de mare al moleculelor, chiar în cazul unui vacuum destul de pronunțat (la $0^0\,C$ și o presiune de $0{,}00001\,mm$ mercur se găsesc 10^{11} molecule într'un cm^3) presiunea exercitată pe cm^2 de perete este constantă cu timpul. Așadar, presiunea gazelor este de altă natură de cât la lichide și la corpurile solide. Pe când la un lichid cu suprafață liberă presiunea este datorită exclusiv greutății coloanei ce apasă pe unitatea de suprafață, la gaze, cari în general sunt închise în vase ermetice, ea este rezultatul ciocnirei moleculelor animate de energie cinetică. Totuși și la gaze, în cazul unei atmosfere libere, cum este cea terestră, presiunea dela baza unei coloane, luată până la limita superioară a atmosferei, își găsește expresia și în greutatea coloanei suprapuse, cu care însă nu se identifică ci o echilibrează. Din punct de vedere practic această diferență nu are importanță.

Pentru măsurarea presiunei unui gaz se întrebuințează de obiceiu barometre de mercur sau manometre metalice, numite *aneroide*, bazate pe aceleași principii ca cele descrise pentru lichide. Indicațiile barometrului au inconvenientul de a cere corecțiuni pentru a reduce înălțimile de coloană la intensitatea normală g_n a gravitațiunei, aceasta diferind după latitudine și altitudine, ceeace influențează evident înălțimea piezometrică al unei anu-

mite presiuni. Ca intensitate normală a gravităției este socotit g_{45^0} la 45^0 latitundine și la nivelul mărei ($980{,}6\ cm/sec^2$). Raportul $\frac{g}{g_{45^0}}$ variază după latitudine în felul următor (*Kohlrausch*):

Latitudine	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{g}{g_{45^0}}$	0,9974	0,9976	0,9980	0,9987	0,9995	1,0005	1,0013	1,0020	1,0024	1,0026

Indicațiile barometrului mai trebuesc corectate cu privire la dilatația mercurului și a sticlei prin încălzire, precum și la tensiunea vaporilor de mercur din spațiul superior gólit de aer, unde deci nu domnește vidul absolut. Există tabele cari procură gata corecțiunile de făcut.

O altă metodă directă pentru măsurarea presiunilor atmosferei se bazează pe măsurarea temperaturei de fierbere a apei.

Barografele sunt aparate automate de înregistrarea presiunilor și sunt prevăzute de obiceiu cu aneroid, iar pentru măsurători de precizie, cu coloană de mercur.

Unitatea de presiune C. G. S. este *barul* $= 1\ dynă/cm^2$.

Ca unitate practică a presiunei avem kg/m^2 sau kg/cm^2, care este ceva mai mic decât o atmosferă.

$1\ kg\ pondere/cm^2 = 0{,}981\ megabar$, iar presiunea atmosferică normală de $760\ mm$ coloană de mercur $= 1{,}033\ kg/cm^2 = 1{,}013\ megabar$. *Megabarul* ($10^6\ bar$) este egal cu presiunea pe cm^2 a aerului la 0^0, Înălcare în câmpul gravităției normale este echilibrată de greutatea unei coloane de mercur de $750{,}08\ mm$:

$$10^6\ dyne/cm^2 = 1{,}02\ kg\ pondere/cm^2,$$

coloana de $750{,}08\ mm \times 1\ cm^2$ cântărind $1{,}02\ kg$ sau aproximativ $1\ kg$. țimea piezometrică în apă, corespunzătoare presiunei de $1\ megabar$, este de circa $10\ m$.

Pentru măsurători de presiuni mai mici se poate întrebuința un barometru mai scurt. Presiuni sub $1\ mm$ coloană de *Hg* se măsoară comprimând în prealabil gazul la o anumită fracțiune a volumului inițial și aplicând apoi legea lui *Mariotte*. Această metodă permite măsurarea de presiuni până la $0{,}00001\ mm$ de *Hg*. Există și metode electrice pentru măsurarea presiunilor mici sau foarte mici.

2. Legile gazelor.

Vom reaminti pe scurt aceste legi.

O masă de gaz, destul de mică pentru a se putea considera cu presiune p constantă în cuprinsul ei, este dominată de următoarele legi principale:

a) *Ecuația fizică sau legea lui Mariotte și Gay Lussac.*

Este ecuația caracteristică sau *legea fundamentală* menționată la începutul cursului și de care ascultă aproximativ (la presiuni nu prea mari) toate gazele (α, coeficientul de dilatație al gazelor este $\frac{1}{273,2}$ sau aproximativ $\frac{1}{273}$):

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha\theta)$$

sau

$$pv = \alpha p_0 v_0 (273 + \theta) = RT, \qquad (1)$$

unde, în sistemul practic de unități: *m, kg, sec* presiunile p (la θ^0) și p_0 (la $\theta_0{}^0 = 0$) sunt exprimate în kg/m^2, $T = \theta + 273$ fiind temperatura absolută, corespunzătoare temperaturei centigrade θ, la care sunt luate p și v, iar:

$$R = \frac{1}{273} v_0 p_0,$$

constanta gazului în *metri/grad*, care este pentru:

aer uscat	29,27 *m/grad*
aer cu un grad mediu de umiditate . .	29,4 „
oxigen	26,47 „
azot	30,19 „
hidrogen	422,59 „ .

In limitele, în cari un gaz ascultă riguros de legea de mai sus, zicem că el se comportă ca un *gaz perfect* sau *ideal*, în opoziție cu *gazul natural*, care se abate de la legea în chestiune.

Introducând greutatea volumică a gazului $\varpi = \frac{1}{v}$ sau densitatea $\rho = \frac{\varpi}{g} = \frac{1}{gv}$, legea de mai sus se mai poate scrie:

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{p}{\rho g} = RT \quad *).$$

Se vede că pentru o anumită masă de gaz, d. e. *1 kg*, avem două variabile independente, a treia variabilă rezultând prin menţionata lege.

Dacă V este volumul unei mase gazoase de greutate G, avem:

$$V = G v$$

şi legea în chestiune se mai poate scrie:

$$pV = GRT. \qquad (1)'$$

Nota I. — Se numeşte *volum molecular* V_m al unui gaz, la *o presiune şi o temperatură dată*, volumul unui gram-moleculă, adică, al unei mase gazoase având un număr de grame egal cu ponderea moleculară şi care masă se numeşte *mol* (se defineşte la fel *volumul atomic*; un *kmol* reprezintă o masă de 1000 ori mai mare, având deci un număr de *kilograme* egal cu ponderea moleculară). Astfel pentru oxigen (O_2) la 0^0 şi *1 atmosferă* $= 10338\ kg/m^2$, volumul molecular V_m ar fi volumul unei cantităţi de *32 grame masă* sau practic de $G_m = 32$ *grame pond*. Pentru a găsi V_m al oxigenului vom înmulţi, aşa dar, *32* cu volumul unui gram, sau *0,032* cu volumul unui kilogram; aceasta revine a împărţi *0,032* cu greutatea volumică a oxigenului (în unităţi practice *kg, m, sec*), care la presiunea atmosferică şi 0^0 este *1,42767*, găsind:

$$V_m = \frac{0{,}032}{1{,}42767} = 0{,}022414\ m^3.$$

Dacă, acum, în loc de a ne raporta la unitatea de greutate (*1 kg*) scriind relaţia $\frac{pv}{T} = R$, ne-am raporta la un *gram-moleculă (un*

---

*) Dacă ϖ al aerului ar fi constant ca la un lichid, $\frac{p}{\varpi}$ ar reprezenta înălţimea H a atmosferei la temperatura 0 sau T. Această înălţime piezometrică fictivă ar fi la $0 = 0$:

$$H_0 = RT_0 = 29{,}4 \times 273 \cong 8\ km.$$

Am putea utiliza acest H fictiv în locul lui $\frac{p}{\varpi}$, scriind ecuaţia fizică a aerului $H = RT$ şi având $H = H_0 \left(1 + \frac{0}{273}\right)$. H se numeşte uneori înălţimea atmosferei *uniforme* sau *omogene* (adică cu ϖ constant) la temperatura respectivă T sau 0, care s'a putea pune ca indice.

mol), adică aci la o cantitate și deci un volum de *0,032* mai mare, întrebuințând forma (1)', iar în formula astfel scrisă

$$pV_m = G_m RT$$

am îngloba $G_m R$ într'o nouă constantă la prima vedere caracteristică gazului (căci G_m ar fi greutatea unui *mol*) aceasta ar reveni la a înlocui constanta oxigenului

$$R = 10332 \cdot \frac{1}{1,42767} \cdot \frac{1}{273} = 26,47 \; m/grad$$ din formula $$R = \frac{pv}{T} = \frac{pV_m}{G_m T}$$

$\left(\text{căci } v = \frac{V_m}{G_m} = \frac{1}{\varpi}\right)$ printr'o nouă constantă $R_m = RG_m$ *de altă dimensie*:

$$R_m = 10332 \frac{0,032}{1,41767} \cdot \frac{1}{273} = 0,847 \; kgm/grad$$ în formula $$R_m = \frac{pV_m}{T}$$

cu

$$V_m = v \, G_m = \frac{G_m}{\varpi}.$$

Dar această constantă R_m, care apare atunci când formula se scrie pentru un mol, este o *constantă generală* comună tuturor gazelor, deoarece volumul molecular la o anumită presiune și temperatură este același pentru toate gazele, conform legei lui *Avogadro*. Această lege exprimă, într-adevăr, că la o presiune și o temperatură date, sub același volum se găsește același număr de molecule, oricare ar fi gazul (densitatea și deci greutatea volumică ϖ fiind în consecință proporțională cu ponderea moleculară G_m).

Nota II. Dacă densitatea gazului comprimat se apropie de aceia a lichidului corespunzător, ceeace se întâmplă la presiuni de mii de atmosfere, eroarea densității dată de formula lui *Marioffe* (care convine numai *gazelor perfecte*) este de ordinul densității însăși. Deaceea s'a căutat a se înlocui această formulă printr'o formulă mai riguroasă, zisă a *gazelor reale*, cum e cazul vaporilor de apă din atmosferă (aproape de punctul lor de lichefacere). S'au propus astfel diverse noi formule de *Dupré*, *Van der Waals*, *Clausius*, etc. In toate aceste formule se introduce *covolumul b* sau volumul-limită, către care tinde volumul molecular V_m la presiunile foarte mari. El este de ordinul volumului gazului adus în stare lichidă sau solidă și corespunde volumului real, pe care îl ocupă moleculele. Astfel formula lui *Van der Waals* se scrie:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = R_m T \text{ sau } p = \frac{R_m T}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

iar aceea a lui *Dupré*, în forma simplificată:

$$p\,(V_m - b) = R_m T.$$

Prezența lui b face ca T să nu crească atât de repede cu p ca în formula lui *Mariotte*.

In practica curentă, unde nu intervin presiuni atât de mari, ne mulțumim cu această din urmă formulă.

b) *Legea lui Dalton* dă constanta R_a (analoagă cu R), care convine unui *amestec* sub forma unei medii:

$$R_a = \frac{\Sigma GR}{\Sigma G}.$$

Această lege primește în practică unul din următoarele două enunțări echivalente:

1⁰. *La presiuni și temperaturi egale, volumele mai multor mase gazoase se adună în amestec.* După acest enunț, dacă avem:

$$\begin{aligned} pV_1 &= G_1 R_1 T \\ pV_2 &= G_2 R_2 T \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \hline p\Sigma V &= T\Sigma GR \end{aligned}$$

deci

va trebui să avem

$$\Sigma V = V_a, \qquad (1)$$

unde V_a este volumul amestecului.

In acest caz va trebui să scriem pentru a defini pe R_a ce convine amestecului, folosind și rezultatul însemnări de mai sus:

$$p\Sigma V = pV_a = R_a\, T\Sigma G = T\Sigma GR.$$

ceea ce procură valoarea:

$$R_a = \frac{\Sigma GR}{\Sigma G},$$

adică tocmai aceea dată de legea lui *Dalton*, din care viceversa se poate deduce enunțul în chestiune. Există deci echivalență între acest enunț și numita lege.

2⁰. *La volume și temperaturi egale, presiunile mai multor mase gazoase se adună în amestec.* După acest enunț, dacă avem:

$$\begin{aligned} p_1 V &= G_1 R_1 T \\ p_2 V &= G_2 R_2 T \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \hline V\Sigma p &= T\Sigma GR \end{aligned}$$

va trebui să avem:

$$\Sigma p = p_a \qquad (2)$$

unde p_a este presiunea amestecului.

In acest caz va trebui să scriem pentru a defini pe R_a care convine amestecului, folosind şi rezultatul însamnări:

$$V\Sigma p = V p_a = R_a T \Sigma G = T\Sigma GR,$$

ceea ce conduce, la valoarea

$$R_a = \frac{\Sigma GR}{\Sigma G},$$

adică tocmai aceea dată de legea lui *Dalton*, din care, viceversa, se poate deduce enunţul în chestiune. Există deci echivalenţa anunţată.

c) *Legea lui Joule.* Când un gaz se destinde adiabatic şi fără a executa lucru exterior, temperatura rămâne aceiaşi. Sau, dacă o masă de gaz trece printr'o serie de transformări, având la sfârşit aceeaşi temperatură ca cea iniţială, există echivalenţă între căldura absorbită de gaz şi lucrul exterior efectuat asupra gazului.

d) Intre căldurile specifice C şi c, necesare pentru ridicarea cu un grad a temperaturei unui kg de gaz, sub presiune, respectiv sub volum constant, avem relaţiunea uşor de demonstrat:

$$C - c = \frac{R}{J} = \frac{1}{427} R,$$

unde $J = 427$ este chivalentul mecanic al căldurei ($427\ kgm = 1$ *Calorie mare*) iar $\frac{1}{J} = \frac{1}{427}$ este echivalentul calorific al lucrului mecanic $\left(\frac{1}{427} Calorii = 1\ kgm\right)$ *).

Intradevăr, C este mai mare decât c, fiindcă, la evoluţia sau transformarea gazului sub presiune constantă, pe lângă ridicarea temperaturei cu un grad, efectuată sub volum constant (în care timp p ar creşte), gazul trebue să mai absoarbă $C - c$ calorii pentru executarea lucrului exterior în timpul dilatărei, necesară pentruca p să nu crească ci să se menţină.

---

*) Calorie mare, sau *Cal* este căldura necesară pentru ridicarea cu *1 grad* a *1 kg* apă. Calorie mică, sau *cal* este căldura necesară pentru ridicarea cu *1 grad* a *1 gram* apă.

Acest lucru are ca expresie $p\Delta v$ și din ecuația fizică:

$$pv = RT$$

deducem sub p constant pentru:

$$\Delta T = 1^0$$

$$lim \frac{p\Delta v}{\Delta T} = R.$$

Așadar, lucrul mecanic în chestiune, care cere $C - c$ calorii, se exprimă prin R în kilogrammetri, fiind echivalent cu $\frac{R}{J} = \frac{1}{427}$ calorii mari și vom scrie:

$$\frac{R}{J} = C - c.$$

Pentru aer:

$$C = 0{,}238 \quad \text{și} \quad c = 0{,}169.$$

In general, departe de punctul de condensație, raportul $\frac{C}{c} = \gamma$ este la gazele biatomice (oxigen, azot, hidrogen) aproape același și egal cu *1,41*. La gazele monoatomice, de exemplu helium, argon și celelalte gaze nobile, apoi vaporii de mercur, de zinc, avem $\gamma = 1{,}67$. Pentru gazele triatomice, de exemplu bioxidul de carbon și vaporii de apă, avem $\gamma = 1{,}3$. Pentru alcool $\gamma = 1{,}15$ și pentru eter $\gamma = 1{,}09$. Valorile mici ale lui γ se atribue structurei complicate a moleculei. Se vede că în cazurile obicinuite ne putem mulțumi cu valoarea $\gamma = 1{,}41$ (vezi în Termodinamică explicația dependenței lui γ de structura moleculei).

e) *Legile evoluțiilor (transformărilor sau schimbărilor de stare) izotermă, adiabatică și isotropică și expresia lucrului mecanic desvoltat.*

Lucrul exterior, efectuat de forțele elastice la expansiunea (destinderea sau dilatarea) unui kg de gaz, este

$$\mathfrak{T} = \int p.dv.$$

Această expresie ia diferite forme după felul evoluării.

In cazul unei *evoluări izoterme*, la ecuația fizică generală se adaogă condițiunea

$$T = const,$$

și ecuația fizică ia forma particulară a *legei lui Mariotte*: $pv = RT = const$, sau $pV = GRT = const.$

Fie o destindere dela p_1 la p_2 ($p_1 > p_2$). Dacă punem

$$\varepsilon = \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\varpi_2}{\varpi_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1,$$

lucrul forţelor elastice, raportat la *1 kg* de gaz, va fi exprimat prin:

$$RT \log \frac{p_1}{p_2} = RT \log \frac{1}{\varepsilon} = p_1 v_1 \log \frac{1}{\varepsilon} = p_2 v_2 \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

In cazul unei *evoluări adiabatice*, pe lângă ecuaţia fizică generală, a cărei diferenţială este:

$$p\,dv + v\,dp = R\,dT,$$

se adaogă condiţiunea că dQ, căldura necesară (pentru *1 kg gaz*) la o evoluţie elementară oarecare (pentru ridicarea temperaturei sub volum constant şi pentru lucrul mecanic exterior, reclamat de variaţia acestui volum) trebue să fie prin definiţie nulă:

$$dQ = c\,dT + \frac{p\,dv}{J} = c\,dT + (C - c)\,\frac{p\,dv}{R} = 0.$$

In această expresie a lui dQ variabilele independente sunt T şi v.

Eliminând pe dT între aceste două relaţiuni, obţinem:

$$\log p = \frac{C}{c} \log v = const$$

sau

$$p v^{\gamma} = const,$$

care (fie deasemenea sub forma $\frac{p}{\varpi^{\gamma}} = const$ sau $\frac{p}{\rho^{\gamma}} = const$) constitue legea adiabatică echivalentă cu $dQ = 0$. Ajungem la acelaşi rezultat dacă ne servim dela început de variabilele independente v şi p, egalând cu zero expresia generală a lui dQ (vezi Termodinamica) pentru variaţia dv sub p constant şi dp sub v constant:

$$dQ = \frac{C\,p\,dv + c\,v\,dp}{R},$$

de oarece sub p constant avem $p\,dv = R\,dT$ şi partea respectivă din dQ absorbit este

$$C\,dT = \frac{C p\,dv}{R},$$

iar sub v constant, cealaltă parte din dQ absorbit rezultă din $v\,dp = R\,dT$, fiind:

$$c\,dT = \frac{C\,d_v p}{R}.$$

Eliminând între formula adiabatică şi ecuaţia fizică a gazelor pe p obţinem formula

$$T v^{\gamma-1} = const,$$

sau

$$\frac{T}{\varpi^{\gamma-1}} = const,$$

iar prin eliminarea lui ϖ formula

$$\frac{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = const,$$

oricare din aceste formule putând înlocui la nevoe formula adiabatică.

Pentru lucrul forţelor elastice în timpul destinderei adiabatice dela p_1 la p_2 $(p_1 > p_2)$, raportat la $1\,kg$ de gaz, vom avea (ţinând seamă şi de formula gazelor perfecte $pv = RT$) o serie întreagă de expresii:

$$\mathfrak{C}_{(1)}^{(2)} = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left(1-\varepsilon^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) = \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_1}{\varpi_1}-\frac{p_2}{\varpi_2}\right) = \frac{R}{\gamma-1}(T_1-T_2),$$

unde ε este, ca şi mai sus, raportul subunitar

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}.$$

Inlocuind pe γ prin valoarea sa $\frac{C}{c}$, mai obţinem formulele:

$$\mathfrak{C}_{(1)}^{(2)} = \frac{R}{C-c}\,c\,(T_1-T_2) = J\,c\,(T_1-T_2).$$

Toate aceste formule exprimă variaţia energiei interne a gazului, raportată la unitatea de greutate ($1\,kg$). Ultima formulă este însăşi expresia legei lui *Joule*, care arată că la gazele perfecte căldura eliberată prin răcirea gazului destins dela T_1 la T_2 se transformă în lucru. Intradevăr, după această lege, dacă destinderea se face adiabatic şi fără execuţie de lucru, temperatura trebue să rămână constantă. Pierderea de căldură datorită scăderei de tem-

TEHNICA / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

peratură $T_1 - T_2$ sub volum variabil n'a putut de cât să dea un lucru mecanic echivalent $Jc(T_1 - T_2)$.

Dacă raportăm fenomenul la unitatea de masă, care este $\frac{1}{g}$, expresia lucrului desvoltat ia, printre altele, următoarele două forme:

$$\mathfrak{T}_{(1)}^{(2)} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_2} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = Jgc\,(T_1 - T_2)\,.$$

Penultima expresie este aceeaşi cu expresia dată la începutul cursului pentru energia *acumulată* în unitatea de masă a gazului în timpul *comprimărei adiabatice* dela p_2 la p_1 (cu $p_1 > p_2$)

$$\overset{1}{E}_2 = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = -\int_{p_2}^{p_1} p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

ceace este evident, deoarece creşterea energiei interne prin comrimarea adiabatică dela p_2 la p_1 este egală cu lucrul forţelor elastice desvoltat în timpul dilatărei adiabatice dela p_1 la p_2 (neintervenind nici un schimb de căldură).

Dacă T_2 tinde către zero, ceeace face ca şi p_2 să tindă către zero, se obţine expresia întregei energii interne a $1\,kg$ de gaz la temperatura T:

$$\frac{p}{(\gamma - 1)\varpi} = \frac{RT}{\gamma - 1} = JcT,$$

iar a unităţei de masă

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} = JgcT.$$

Evoluţia isotropică este aceea în care p şi v sunt legate prin relaţia $pv^{\varkappa} = const$ (cu $\varkappa$ diferit de γ), şi care prin urmare se face cu schimb de căldură. In cazul unei evoluţiuni isotropice după o asemenea lege, expresia lui $\mathfrak{T}$ este dată de aceleaşi formule, în cari în loc de γ punem $\varkappa$, acesta însă neputându-se evident înlocui prin $\frac{C}{c}$, astfel că formulele de mai sus, în care s'a folosit relaţia $\gamma = \frac{C}{c}$, nu mai sunt valabile pentru fenomenul isotropic.

3. Repartiția presiunei și densității într'o masă de gaz sau vapori în echilibru. Cazul special al atmosferei.

Condițiunea primă ce se cere pentru existența echilibrului este, precum am văzut, ca forțele exterioare să derive din o funcțiune de forță (condiție îndeplinită în cazul gravitațiunei). Valoarea presiunei în funcție de z se obține atunci prin integrarea ecuației hidrostaticei:

$$\frac{dp}{\rho} + dU = 0$$

sau, în cazul gravitațiunei, cu axa de referință verticală ascendentă:

$$\frac{dp}{\varpi} + dz = 0 \qquad (1)$$

și eliminarea lui ϖ prin ecuația fizică, a cărei formă, în cazul gazelor perfecte, este:

$$pv = p_0 v_0 \left(1 + \frac{\theta}{273}\right) = RT$$

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi_0}\left(1 + \frac{\theta}{273}\right) = RT\,. \qquad (2)$$

Dacă echilibrul există sub temperatură constantă în toate punctele ocupate de gaz, este util a înlocui RT constant prin constanta introdusă mai sus în cazul atmosferei și anume H_0 scrisă simplu H, fiind însă bine înțeles că H corespunde atunci unei anumite temperaturi după egalitatea $H = RT$. Cu această semnificație a lui H, ecuația fizică se scrie, de altfel în toate cazurile:

$$p = H\varpi.$$

Precum am văzut însă *echilibrul static* (în opoziție cu cel *termic*, pe care îl vom presupune aproximativ asigurat, întrucât radiațiunea termică între regiuni cu T diferit se produce extrem de slab din cauza relei conductibilități termice a gazului) nu cere ca θ sau T să fie constant în întreaga masă, fiind suficient ca temperatura să fie constantă numai după suprafețele echipotențiale (într'un spațiu mai restrâns, acestea fiind planuri orizontale).

Ecuația (1) combinată, așa dar, cu (2) în scopul de a se elimina ϖ dă:

$$\frac{dp}{dz} = -\varpi = \frac{-p}{RT},$$

iar în cazul echilibrului *izoterm* cu H constant:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{H} \qquad (2')$$

Pentru aer, având în vedere că la $\theta = 0$

$$p_0 \cong 10336\ kg/m^2$$

și

$$\varpi_0 = 1{,}29\ kg/m^3$$

deci

$$\frac{p_0}{\varpi_0} = p_0 v_0 = H_0 \cong 8000,$$

obținem prin integrare *formula barometrică*:

$$z - z_0 = H \log \frac{p_0}{p} \cong 8000\,(1 + \alpha\theta) \log \frac{p_0}{p},$$

care dă repartiția presiunei pe verticală. Dacă această repartiție ar fi reală pe întreaga atmosferă, pentru $p = 0$ ar rezulta $z = \infty$, cu alte cuvinte înălțimea unei atmosfere izoterme ar fi infinită. In realitate temperatura descreşte cu înălțimea, ceeace înlătură paradoxul.

Scoțând pe p în funcție de z din formula barometrică, se poate introduce în expresia lui ρ sau ϖ din ecuația fizică, pentru a avea și aceste elemente în funcție de z. Obținem astfel:

$$p = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$$\varpi = \varpi e^{-\frac{z}{H}}$$

sau

$$\rho = \rho e^{-\frac{z}{H}}.$$

Reamintim că aci H reprezintă o constantă egală cu RT, în ipoteza că T este același în întreaga atmosferă (repartiție izotermă).

Să căutăm acum relația între z și p, în cazul (aplicabil atmosferei reale) unui echilibru mai puțin stabil (precum vom vedea) decât al unei atmosfere isoterme, și anume cu temperatura descrescând cu înălțimea, și la care legătura între diversele caracteristice ale aerului din fiecare punct (p, ϖ și T) ar fi d. e. o relație de formă politropică (a nu se perde din vedere că aci nu e vorbă de o evoluție în timp a unei anumite mase limitate, ci de o repartiție în spațiu la un mare ansamblu de mase):

$$\frac{p}{\varpi^{\varkappa}} = const,$$

(eventual adiabatică cu $\varkappa = \gamma$ care, precum vom vedea, formează limita echilibrului stabil și anume echilibrul indiferent). Se constată ușor că, în acest caz, expresia lui $z - z_0$ poate rezulta din aceea a lucrului mecanic $\mathfrak{T}$, stabilită mai sus pentru o schimbare politropică, prin înmulțire cu $\varkappa$. Intradevăr, relația căutată se obține și în acest caz din combinația ecuației hidrostatice:

$$dz = -\frac{dp}{\varpi} = -v\,dp.$$

(unde v este volumul unității de greutate) cu ecuația fizică politropică sau adiabatică, care are forma diferențială:

$$\varkappa p\,dv = -v\,dp.$$

Rezultă, în cazul considerat:

$$dz = \varkappa p\,dv = \varkappa\,d\mathfrak{T}.$$

Așadar, putem utiliza în acest scop toate expresiile lui $\mathfrak{T}$:

$$z - z_0 = \frac{\varkappa R T_0}{\varkappa - 1}\left(1 - \varepsilon^{1-\frac{1}{\varkappa}}\right) = \frac{\varkappa(p_0 v_0 - pv)}{\varkappa - 1} =$$

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left(\frac{p_0}{\varpi_0} - \frac{p_1}{\varpi_1}\right) = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}(T_0 - T),$$

găsind astfel simultan și pe z în funcție de T sau viceversa, adică și repartiția lui T. A trebuit bine înțeles să înlocuim, conform notațiunei de aci, indicele *1* prin *0*, iar pe *2* să-l suprimă. Pentru repartiția isotermă, făcând $\varkappa = 1$ și $T = T_0$, ajungem la forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, și deaceea mai sus am procedat altfel, punând dela început $\varkappa = 1$ și integrând în urmă.

Pentru a găsi pe z numai în funcție de p, eliminăm pe ϖ cu ajutorul ecuației fizice, obținând:

$$z - z_0 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varpi_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right].$$

Dacă, invers, eliminăm pe p, găsim:

$$z - z_0 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varpi_0}\left[1 - \left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{\varkappa-1}\right].$$

Din relația $z = z(T)$ rezultă că, în toate cazurile de echilibru considerat (isoterm cu $\varkappa = 1$, politropic cu $1 < \varkappa \lessgtr \gamma$, adiabatic cu $\varkappa = \gamma$), gradientul de temperatură

$$a = -\frac{dT}{dz} = \frac{\varkappa - 1}{R}, \text{ care dă } T = T_0 - a(z - z_0)$$

este constant.

Ecuația diferențială:

$$dz + \frac{dp}{\varpi} = 0$$

sau

$$\varpi\, dz + dp = 0,$$

integrată între cele două puncte z și z_0, exprimă că diferența de presiune pe unitatea de suprafață între două puncte este egală (ca și la lichide) cu greutatea unei coloane de gaz, având ca bază unitatea de suprafață, ca înălțime diferența de cote și ca densități, densitățile respective ale masei gazoase la diferitele altitudini. Așadar, dacă fluidul nu este conținut într'un vas închis, cum este cazul atmosferei, care este reținută numai prin atracția pământului, luându-se punctul z la marginea ei superioară unde $p = 0$ (și deci $T = 0$), presiunea p_0 la un punct inferior z_0 va fi datorită numai greutății coloanei de gaz suprapuse (pământul presupus fix).

Utilizând cele trei ecuațiuni:

$$\frac{dp}{\varpi} + dz = 0 \text{ (hidrostatica)} \qquad (1)$$

$$\frac{p}{\varpi} = RT \text{ (fizica)} \qquad (2)$$

și

$$\frac{p}{\varpi^{\varkappa}} = B \text{ (politropica)}, \qquad (3)$$

unde B este o constantă, ultima ecuație putând fi înlocuită prin echivalenta ei, găsită mai sus,

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa R} = a,$$

putem exprima variabilele p, ϖ și T în funcție de z, sau pe p, ϖ și z în funcție de T. Se verifică ușor că, teoretic, greutatea unei coloane cu $z = \frac{T_0}{a}$ (luând $z_0 = 0$ iar la partea superioară a coloanei: $T = 0$ odată cu $p = 0$) dă presiunea p_0 la bază, adică relația:

$$p_0 = \int_0^{\frac{T_0}{a}} \varpi\, dz,$$

în care introducem de sus expresia lui

$$\varpi = \varpi(z).$$

Deasemenea se poate verifica aceeași relație, înlocuind atât pe ϖ cât și pe dz în funcție de T și integrând dela T_0 la 0.

Măsurarea altitudinelor. Pe baza considerațiilor de mai sus se poate face calculul diferenței de altitudine $z - z_0$ dintre două puncte cu ajutorul barometrului. Pentru diferențe nu prea mari ne putem servi de preferință de repartiția izotermă, adică luând drept ecuație (3) legea izotermă ($\varkappa = 1$). Presiunile p și p_0 se pot măsura cu barometrul, fiind porporționale cu coloanele de mercur h_0 și h citite pe aparat, astfel că *formula barometrică* se poate scrie în adevărata ei formă [1]), căreia i se datorește numele:

$$z - z_0 = H \log \frac{h_0}{h}.$$

Introducând valoarea constantei și logaritmii zecimali în locul celor naturali, obținem:

$$z - z_0 = 2{,}3026\, p_0 v_0 \left(1 + \frac{\theta}{273}\right) \log_{10} \frac{h_0}{h}.$$

Dacă $z - z_0$ este mai mare și intervine variația temperaturei după o lege de repartiție politropică cu un gradient de temperatură:

$$-\frac{dT}{dz} = a = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa R},$$

în locul formulei izoterme trebue luată cea politropică, sau chiar această relație echivalentă, a unui gradient constant de T. Aceasta revine la a întrebuința formula dată mai sus pentru $z - z_0$ în funcție de $\frac{p}{p_0}$ sau de $T_0 - T$ pag. 288, care formulă se poate obține însă și direct, integrând ultima relație:

$$z - z_0 = \frac{T_0 - T}{a} = \frac{T_0}{a}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right).$$

Intradevăr prin eliminarea lui ϖ între formula politropică (3) și ecuația fizică obținem

$$\frac{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}{T} = const \quad \text{sau} \quad \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{aR} = \frac{T}{T_0},$$

1) Cu indicațile barometrice h_0, h.

ceea ce permite scrierea relației de mai sus sub forma:

$$z - z_0 = \frac{T_0}{a}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{aR}\right].$$

Or această formulă este identică cu cea găsită la pag. 288 pentru $z - z_0$ în funcție de p, deoarece

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = aR,$$

și

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varpi_0} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} RT_0 = \frac{T_0}{a}.$$

In practică se obicinuește însă a se întrebuința formula barometrică, găsită mai sus pentru atmosfera isotermă, introducând în schimb o temperatură medie.

Cu aceleași valori ca mai sus pentru p_0 și ϖ_0 vom avea:

$$z - z_0 = 18336\left(1 + \frac{\theta + \theta_0}{2 \times 273}\right) log_{10}\frac{h_0}{h}$$

sau aproximativ:

$$z - z_0 = 18336\left(1 + \frac{\theta + \theta_0}{500}\right) log_{10}\frac{h_0}{h}.$$

Pentruca formula să câștige în exactitate, trebue să se țină seamă de variația lui g, invers proporțional cu pătratul distanței la centrul pământului:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{r^2}{(r+z)^2},$$

r fiind raza pământului până la nivelul mării (unde avem p_0), iar z altitudinea, măsurată deasupra acestui nivel, a punctului cu presiunea p. In afară de aceasta, trebue să se mai țină seamă de variația lui g cu latitudinea și, în fine, de influențarea raportului înălțimilor de coloană de mercur h_0 și h, cari servă la măsurarea presiunilor, pe de o parte prin diferența de temperatură, iar pe de altă parte prin valorile diferite ale lui g la cele două puncte de observație.

De aceea, în formula pe care se bazează tabelele anuarului *Biroului de Longitudini din Paris*, membrul al doilea al formulei de mai sus este completat cu un factor corectiv, care ține seamă de toate aceste influențe.

In fine notăm că, dacă pentru $z - z_0$ facem $p = 0$ în formula

politropică, sau $T = 0$ în formula echivalentă care conține gradientul de T, obținem ceeace se poate numi *înălțimea atmosferei politropice*:

$$\frac{T_0}{a} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} RT_0,$$

care, pentru $\varkappa = 1{,}235$ (aer umed) sau

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 5{,}3 \quad \text{și} \quad RT_0 = \frac{p_0}{\varpi_0} = 8 \text{ km},$$

dă cifra de

$$5{,}3 \times 8 \text{ km} \cong 42 \text{ km}$$

la temperatura $\vartheta_0 = 0^0$ (sau $T_0 = 273^0$). Dacă repartiția temperaturei s'ar face cu $\varkappa = \gamma$, adică după legea adiabatică (de exemplu pentru aerul uscat), gradientul de temperatură ar fi:

$$a = \frac{\gamma - 1}{\gamma R} = \frac{1}{JC},$$

sensibil mai mare ca media reală, după cum se va arăta mai jos (datorită faptului că în general avem $\varkappa$, cu $\varkappa < \gamma$).

4. Atmosfera reală.

a) *Densitate.* In condițiuni normale ($\vartheta = 0^0$, *760 mm Hg*) avem pentru aer $\rho = 0{,}001293\ g/cm^3$. In aceleași condițiuni numărul de molecule (egal pentru toate gazele) este de $2{,}7 \times 10^{19}$ într'un cm^3. La $\vartheta = 10^0$ și *762 mm Hg* avem $\rho = 0{,}00125\ g/cm^3$.

b) *Compoziția aerului lângă sol.* După determinările cele mai noi, compoziția aerului lângă suprafața pământului este următoarea:

Azot	78,03	*vol.* %	75,5 *greut.* %
Oxigen	20,99	„ „	23 „ „
Argon	0,94	„ „	
Bioxid de carbon	0,03	„ „	
Hidrogen	0,01	„ „	
Neon	0,0015	„ „	
Helium	0,00015	„ „	

Conținutul în CO_2, indicat în medie cu 0,03 %, este supus, contrar celorlalte gaze constitutive, la mari variațiuni în spațiu și în timp, fiind în general mai mare deasupra continentului decât deasupra mării. La gazele menționate se mai adaogă, deasemenea

în cantităţi variabile (până la 4 vol. %), vaporii de apă. In mod accesoriu se mai găsesc urme de amoniac, acid sulfuric, acid azotic, hiperoxid de hidrogen şi particule solide foarte fine.

c) *Variaţiuni de presiune.* Intr'un acelaşi loc presiunea aerului este supusă la variaţiuni. Presiunea minimă observată până acum este de *688 mm Hg*, iar cea maximă de *809 mm Hg*. In o medie însă, pe un lung interval de timp, abaterile presiunei dela *760 mm Hg* nu întrec *20 mm Hg*. In general presiunea scade dela ecuator spre poli (pe hemisfera sudică mai repede ca pe cea nordică) pentruca în apropierea polilor să crească iarăşi puţin, această regulă fiind totuşi influenţată de configuraţia şi structura suprafeţei. Deasemenea variaţia anuală a presiunei depinde de loc, în special diferind pe continent (maximum de iarnă) şi pe mare (maximum de vară), din cauza variaţiunei diferite a temperaturei pe uscat şi pe mare. Variaţia zilnică, cu care se suprapun des schimbări neperiodice, arată în medie peste tot două maxime între orele 9—10 şi 22—23 şi două minime între orele 15—16 şi 3—4. Oscilaţiile zilnice descresc dela ecuator spre poli, precum şi cu altitudinea deasupra mării. In general o creştere de temperatură corespunde unei depresiuni, iar o descreştere de temperatură, invers, unei urcări a presiunei.

Pentru meteorologie importă a se cunoaşte gradientele de presiune pe orizontală şi în acest scop se trasează pe hârte liniile *isobare*, reduse la nivelul mării.

d) *Compoziţia aerului după înălţimi.* Formulele de mai sus dau presiunea la altitudinea z în funcţie de presiunea p_0 şi de greutatea volumică ϖ_0 (sau densitatea ρ_0) de la suprafaţa solului.

Pentru diversele gaze, cari compun aerul, aceste date diferă mult între ele şi fiecare din aceste gaze ascultă separat de legile gazelor, conform regulei lui *Dalton*. Rezultatul este că presiunile parţiale descresc cu înălţimea în mod diferit pentru fiecare din gazele componente, compoziţia aerului în zonele superioare trebuind să se schimbe în favoarea gazelor uşoare. Intradevăr formula barometrică cu $z_0 = 0$, scrisă:

$$z = \frac{p_0}{\varpi_0} \log \frac{p_0}{p},$$

dă

$$p = p_0 e^{-\frac{\varpi_0}{p_0} z},$$

care arată că descreşterea presiunei parţiale este cu atât mai înceată cu cât ϖ_0 este mai mic.

Amestecul continuu însă face ca, în straturile inferioare ale atmosferei, compoziţia aerului să fie neschimbată, astfel că numai la altitudinile mari compoziţia se schimbă după legea lui *Dalton*. Până la *30 km* înălţime atmosfera se poate considera ca omogenă, şi numai aburii fac o regulă separată, iar conţinutul în bioxid de carbon creşte chiar la început cu înălţimea, din cauza schimbului de gaze cu vegetaţia.

Cu aceste restricţiuni, compoziţia aerului variază cu altitudinea ca în fig. 173. Din această figură se vede că variaţiile în compoziţie sunt foarte mari. Peste altitudinea de *80 km* oxigenul ar dispărea din atmosferă, iar mai sus de *120 km* s'ar trece din atmosfera de azot în aceea de heliu, pentruca la o înălţime şi mai mare să nu existe decât hidrogen exclusiv. Totuşi aspectul se schimbă mult prin repartiţia temperaturei, ce se presupune că există în straturile superioare. La aceasta contribuie şi faptul că, mica *turbulenţă* ce există în acele straturi ar putea să schimbe complet indicaţiile din figura în chestiune. Spectrul de lumină polarizată a arătat că, în orice caz la înălţimi de câteva sute de *km* se mai găseşte azot şi chiar oxigen. De asemenea se pare că straturile superioare conţin şi ozon.

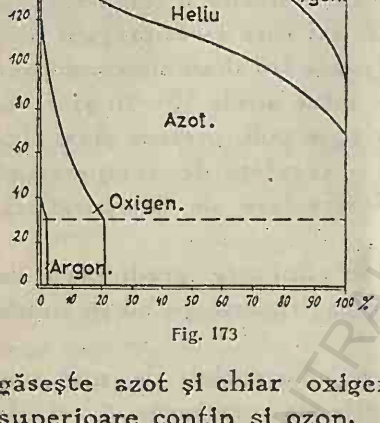


Fig. 173

Intradevăr, spectrul solar ultraviolet se frânge exact în locul unde ozonul începe să absoarbă puternic. S'a dedus prin calcul grosimea unui strat de ozon care, după reflexiile acustice observate, ar trebui să se găsească la *50—70 km* înălţime. Sondaje recente cu baloane înregistratoare şi spectrograme îndreptăţesc părerea că ozonul ar fi repartizat într'un interval cu mult mai mare. Centrul de greutate al acestui strat pare să fie chiar la *24 km*, având o proporţie de ozon în aer de cira *0,01%*. Importanţa ozonului pentru aviaţie constă în aceea că, chiar la o mică concentrare, el atacă cauciucul şi poate eventual să distrugă îmbrăcămintea sensibilă a balonului.

e) *Structura atmosferei.* Datele expuse mai sus permit a se schiţa structura întregei atmosfere terestre (Fig. 174).

Perturbările atmosferice se petrec în deobşte într'un strat de *10 km*, numit *troposferă*, aproape de sol. In privinţa repartiţiei maselor se poate spune că întreaga atmosferă cântăreşte o

milionime din lito-și hidrosferă, însă în primii 5 *km* înălțime avem jumătatea masei atmosferice, iar într'un strat de 20 *km*, adică inclusiv *stratosfera* [1]), aproape 95% din această masă. Presiunea (a se vedea curba *p*) și densitatea descresc cu înălțimea, însă o limită propriu zis a atmosferei nu există. Până la 500 *km* înălțime densitatea ei este încă suficientă pentru a fi sediul unor fenomene observabile, precum: lumini polare, stele căzătoare, meteore, crepuscule.

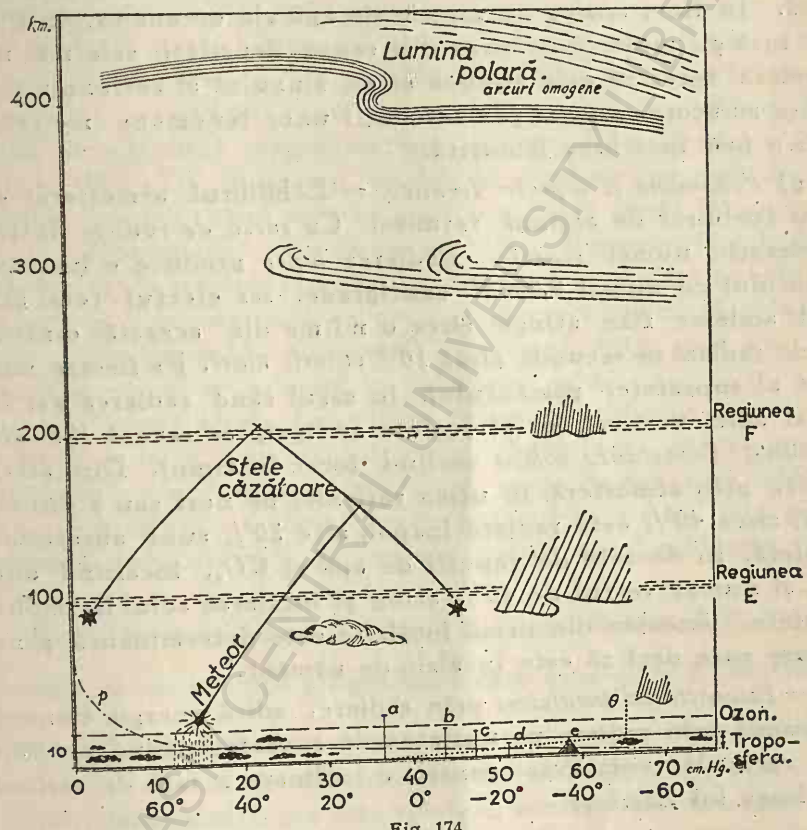


Fig. 174

Înălțimimile atinse

a = balon de înregistrare
b = balon cu pasageri
c = avion
d = dirijabil
e = muntele Everest.

f) *Influența rotației pământului.* Descrierea de mai sus se referă la un echilibru *static* al atmosferei. Efectiv, în rotația sa pământul antrenează prin frecare straturile inferioare, cari

[1]) Uneori prin *stratosferă* se înțelege, mai general, tot ce se găsește deasupra troposferei.

se pot socoti în repaus relativ faţă de pământ. Din contra straturile superioare ale stratosferei nu par să urmeze mişcarea pământului. De ex. din mişcarea norilor luminoşi de noapte s'a evaluat un vânt estic de *100 m/sec.*

Precum însuşi pământul s'a turtit prin rotaţie, în acelaşi sens s'a deformat şi atmosferea. De asemenea rotaţia pământului înclină limitele dintre straturi şi deviază spre dreapta curenţii depe hemisfera noastră, spre stânga pe aceia de pe hemisfera sudică. In fine, analog cu masele de apă ale oceanelor, în o măsură însă cu mult mai mare din cauza densităţii sale mai mici, atmosfera terestră este supusă şi ea fluxului şi refluxului. Influenţa acestora asupra periodicităţii unor fenomene meteorologice n'a fost încă bine lămurită.

g) *Fenomene şi aspecte termice.* — Echilibrul atmosferei este mereu turburat de acţiuni termice. Ca *sursă de radiere* intră în consideraţie numai *soarele.* Radierea *lunei* produce o încălzire a pământului cu numai $0{,}0002^0$ centigrade, iar efectul total al radierei stelelor fixe atinge circa o miime din această cantitate. Soarele radiază pe secundă circa 10^{23} *calorii mari.* Pe fiecare metru pătrat al suprafeţei pământului, în cazul când radierea s'ar face normal adică vertical, iar atmosfera ar lipsi, ar reveni *194 calorii mari/minut* (*constanta solară* variind încet în timp). Din această căldură, prin atmosferă, în urma reflexiei pe nori sau a difuzării în aer, circa 40% este radiată înapoi, alte 20% sunt absorbite în atmosferă, în deosebi de vaporii de apă şi CO_2, încălzind direct aerul, şi numai restul de 40% ating şi încălzesc solul iar indirect atmosfera. Aceasta din urmă încălzire este determinantă pentru aer, care pare deci că este încălzit de pământ.

— *Intensitatea încălzirei* prin radiere, adică energia transmisă pe secundă prin radiere pe unitatea de suprafaţă, fiind notată cu I_0 pe verticală, vom avea pentru o inclinare α faţă de verticală, după legea lui *Lambert*

$$I_\alpha = I_0 \cos \alpha.$$

Datorită acestei înclinări ar fi trebuit să înregistrăm o scădere de temperatură regulată pe întinderea suprafeţei terestre dela ecuator la poli. In realitate această repartiţie este turburată simţitor prin structura soarelui, constituţia solului şi mişcările de aer.

Un corp se încălzeşte cu atât mai uşor, cu cât căldura lui specifică c este mai mică, şi cum apa are un c mai mare, oceanul şi masele de aer depe el sunt vara şi ziua mai reci decât con-

ținentele și aerul depe acestea, iar iarna și noaptea mai calde. De aci rezultă variația zilnică și anuală a presiunei aerului, diferită ca sens pe uscat și pe mare. Diferențe mai mici există și în interiorul continentelor; totuși forma și culoarea joacă aci un rol mai important decât constituția terenului. Punctele de temperatură egală se însemnă pe hartă prin linii *isoterme*.

O încălzire locală, din cauza condițiilor deosebite de radiațiune (precum: poziția soarelui, înourare, umiditatea aerului, configurația suprafeței), este cauza unor mișcări, mai importante în sens vertical decât orizontal, și cari, din cauza vitezei cu care se produc, se petrec *adiabatic*. Norii *cumulus* servă astfel ca surse de curenți ascendenți, cari pot fi folosiți pentru *sborul plutit*; acești curenți sunt compensați prin mișcări descendente în împrejurimea lor. Un fenomen analog se produce pe șes deasupra râurilor, atunci când acestea sunt mai calde decât împrejurimea.

— *Urcarea* unei mase de aer mai poate fi provocată prin isbirea unor limite de straturi sau obstacole terestre. Astfel munții silesc curenții ce îi lovesc ca să se urce, mișcare compensată prin o altă mișcare descendentă. Curentul ascendent este rece din cauza expansiunei, cel ce coboară în vale este cald.

Dacă două straturi cu vitese orizontale diferite alunecă unul pe altul, rotația pământului înclină delimitarea dintre straturi, după cum s'a mai spus. Dacă două mase de aer, una caldă alta rece, se întâlnesc cu front vertical, aerul rece fiind mai greu se strecoară sub cel cald. In ambele cazuri aerul cald este împins în sus.

Dacă o masă de aer *uscat* se urcă în o stratificație adiabatică, temperatura ei scade după un gradient care este $\frac{1}{JC} \cong 1^0$ centigrad de fiecare *100 m*, pe când pentru aerul *umed* avem $0^0,6$ la *100 m*.

— *Schimburile de căldură* se fac în trei feluri: 1) prin *conductibilitate*, care pentru aer este minimă, acesta fiind rău conducător termic. Fără această proprietate a aerului, care ferește pământul de schimburile prea mari de căldură, contrasturile de temperatură între zi și noapte ar fi fost așa de mari, încât organismele mai înaintate n'ar fi putut trăi; 2) prin *radiere*, singura cale pe care pământul primește căldura solară, dar care joacă de asemenea un rol secundar pentru atmosferă; 3) prin *convecțiune*, care are efecte considerabil mai mari și care constă în mișcarea maselor de aer încălzite, spre regiuni mai reci. Diferențele de temperatură între masele în contact nu au aci nici o importanță pentru iuțeala cu care se face schimbul de căldură.

— Pentru *repartiția temperaturei* pe verticală, conductibilitatea poate fi neglijată. Dacă schimbul de căldură în atmosferă s'ar face numai prin radiere, temperatura ar scădea cu înălțimea ca și presiunea, aproape exponențial. In straturile inferioare ale atmosferei, cari formează *troposfera*, această regulă este complet schimbată prin convecțiune și prin umiditatea aerului, cari fac ca gradienul de temperatură mediu, observat în troposferă, să corespundă aproximativ celui adiabatic, de 1^0 la $100\,m$ pentru aerul uscat, de $0^c,5$—$0^0,6$ pentru aerul umed, independent de înălțime. Legea de repartiție spațială a temperaturei este deci o lege politropică (cu gradient constant).

Această lege, la rândul ei, este turburată de încălzirea sau răcirea diferită a diverselor straturi prin alte cauze. Astfel, prin o încălzire intensă a solului gradientul straturilor inferioare atinge câteva grade centigrade pe $100\,m$, iar la o răcire pronunțată a solului gradientul scade sensibil sau chiar se *inversează*. Cu aceste excepții avem un gradient mediu de $0^0,6$ *pe* $100\,m$ până la o înălțime oarecare, urmând apoi o temperatură constantă sau chiar în creștere, datorită încălzirei straturilor superioare prin radiațiuni ușor absorbibile (ultraviolete). Această diferență în gradient formează în deobște distincția între *tropo* — și *stratosfera*. Constanța temperaturei în stratosferă se explică prin ipoteza unui echilibru între radiație și difuzare, însă după explorările mai noi ar exista și aci mișcări, cari ar putea influența și pe cele din troposferă.

— Un exemplu de circulație permanentă sunt *vânturile* de uscat și de mare, ce se schimbă regulat între zi și noapte. Ziua continentul se încălzește mai repede decât marea și se produce un curent către uscat. Noaptea solul se răcește mai pronunțat, iar vântul bate spre mare. Ambele vânturi sunt, firește, însoțite în straturile superioare de curenți compensatori de sens invers.

— Prin condensația vaporilor din aer se produc *norii* vizibili, provocați mai întotdeauna prin răcirea maselor de aer ascendente. O excepție este *ceața*, care își datorește producerea răcirei straturilor de aer de lângă pământ. Ceturile de toamnă provin din radierea solului, pe când ceața de mare se produce atunci când aerul rece se mișcă pe apa caldă a mărei.

— *Vaporii de apă* din atmosferă, cât timp sunt nesaturați se comportă ca un gaz perfect. Indată ce punctul de saturație este întrecut, aburul trebue considerat ca un *gaz real*, care ascultă deci de legea lui *Van der Waals*. Densitatea aburului este de

$\frac{5}{8}$ a densității aerului și de aceea aerul umed este mai ușor ca cel uscat, fiind deci supus unei forțe ascensionale. Din punctul de vedere al acesteia se poate înlocui aerul umed prin aer uscat de egală densitate, deci mai cald; temperatura fictivă a acestui aer depinde, așadar, de cea reală T și de umiditatea specifică s:

$$T_f = T\,(1 + 0{,}605\,s).$$

Dacă aburul este nesaturat, în timpul urcării lui are o variație de temperatură egală cu a aerului uscat, adică 1^0 la $100\ m$, urmând, deci, ceeace se poate numi *adiabatica uscată* (vezi mai departe), pe când la depășirea punctului de saturație se desvoltă căldură prin condensație, ceeace micșorează descreșterea de temperatură, gradientul trecând la $0^0{,}6$ pe $100\ m$. Se zice atunci că aerul saturat urmează *adiabatica umedă*.

5. Atmosfera standard.

Pentru Aerodinamică ceeace interesează în special sunt proprietățile fizice ale aerului (presiune, temperatură, densitate), precum și variația lor cu altitudinea, ca valori *medii*, cari definesc o atmosferă tip fictivă, *atmosfera standard*.

Sondagiile făcute cu balonul arată că între o limită inferioară de $10—12000\ m$, de fapt $7\ km$ la pol și $14\ km$ la ecuator, și o limită superioară de circa $20000\ m$, temperatura rămâne constantă la circa $-55^0\ C$. Acest strat, numit *stratosferă*, situat deasupra *troposferei*, este deci isoterm și în echilibru normal.

Măsurătorile făcute pe o scară mare în *troposferă* asupra descreșterei temperaturei cu altitudinea, dela nivelul mării și până la limita inferioară a stratului isoterm, au îndreptățit întrebuințarea, pentru scopuri practice, a ecuației (echivalentă cu o ecuație politropică, în care $\varkappa$ are valoarea $1{,}235$, corespunzătoare lui a mediu determinat experimental):

$$T = T_0 - a\,(z - z_0) \qquad (1)$$

iar cu $z_0 = 0$:

$$T = T_0 - a\,z\ .$$

In această ecuație T și T_0 sunt temperaturile la altitudinea z și la nivelul mării ($z_0 = 0$), iar constanta a gradientul mediu al temperaturei, pentru care s'a găsit valoarea de $0^0{,}65\,C$ de fiecare $100\ m$ sau de $0^0{,}0065\ C$ de *metru*. Acest strat, care formează *troposfera*, nu este riguros în echilibru, precum am văzut,

fiind turburat de curenţii de mare circulaţie, cari se produc dela poli la ecuator şi înapoi, precum şi de diverse alte cauze locale sau temporale (între regiuni de joasă şi de înaltă presiune), de care însă în *atmosfera standard* se face abstracţie.

Legea liniară se aplică numai sub stratul isoterm, a cărui temperatură, indicată mai sus, dă limita de aplicabilitate a formulei (1). Plecând dela o temperatură $T_0 = 288^0$ la nivelul mării (sau $\theta_0 = 15^0$), găsim $z_1 = 10769\ m$ pentru altitudinea maximă până la care se poate întrebuinţa formula.

Pentru a defini *atmosfera standard*, considerată în aviaţie, în scop de a supune proprietăţile fizice calculului matematic, se mai admite că:

a) aerul este uscat.

b) aerul se comportă ca un gaz perfect, ascultând de legea lui *Mariotte* şi *Gay-Lussac*.

c) gravitatea ar fi constantă la toate altitudinile cari interesează Aeronautica.

Astăzi în aeronautică se aplică formula barometrică, întrebuinţând o temperatură medie exactă, după cum urmează.

Dacă combinăm ecuaţia fizică:

$$p = \varpi R T \tag{2}$$

cu ceea hidrostatică:

$$-\varpi\, dz = dp,$$

obţinem:

$$\frac{1}{R}\int\frac{dz}{T} = -\int\frac{dp}{p} = -\log\frac{p}{p_0}$$

şi, introducând o temperatură medie T_m, definită acum mai exact prin relaţia

$$\frac{z}{T_m} = \int_0^z \frac{dz}{T},$$

şi a cărei valoare, ţinând seama de (1), este

$$T_m = \frac{az}{\log\frac{T_0}{T}}$$

(în cazul unei repartiţii isoterme pe verticală adică cu $a = 0$, am avea $T_m = T$), găsim forma formulei barometrice stabilită pentru cazul izoterm

$$z = RT_m \log\frac{p_0}{p}, \tag{3}$$

căreia însă introducerea mediei exacte T_m, în locul mediei aritmetice $\frac{T+T_0}{2}$, îi dă exactitatea formulei politropice.

Inlocuind pe R prin valoarea lui din ecuaţia fizică. scrisă pentru nivelul mării:

$$R = \frac{p_0}{\varpi_0 T_0},$$

(3) ia forma

$$log\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{\varpi_0 z}{p_0}\left(\frac{T_0}{T_m}\right), \qquad (3')$$

de unde se poate scoate p pentru orice altitudine z, iar prin legea fizică se calculează ϖ, întrucât T se obţine imediat din formula (1) a gradientului.

In modul acesta se dispune de toate relaţiile dintre fiecare din cele trei cantităţi (presiune, temperatură, densitate) pe de o parte şi altitundine de pe altă parte.

In stratul isoterm (stratosferă) valoarea care convine pentru T_m este definită prin relaţia

$$\frac{z}{T_m} = \int_0^{z_1} \frac{dz}{T} + \int_{z_1}^{z} \frac{dz}{T};$$

sau

$$\frac{z}{T_m} = \frac{z_1}{T_{m_1}} + \frac{z - z_1}{T_1} = 42{,}84 + \frac{z - z_1}{T_1}, \qquad (4)$$

unde $z > z_1$ este cota curentă, $z_1 = 10769\,m$ cota unde începe stratul isoterm, $T_1 = 218^0$ temperatura constantă din acest strat, T_{m_1} valoarea medie din întreaga troposferă până la z_1, obţinută prin regula dată mai sus şi anume

$$T_{m_1} = \frac{a z_1}{log \frac{T_0}{T_1}},$$

de unde prin calcul

$$\frac{z_1}{T_{m_1}} = 42{,}84.$$

Formula (4), în care se mai poate pune după (3)

$$\frac{z_1}{T_{m_1}} = R\, log \frac{p_0}{p_1},$$

dă, în condițiunile admise mai sus ($T_0 = 288^0$):

$$T_m = \frac{z}{42{,}84 + \frac{z - z_1}{T_1}} = \frac{z}{42{,}84 + \frac{z - 10769}{218}} \qquad (4')$$

pentru $z > z_1$.

Dacă luăm valoarea lui T_m din (4)' și o introducem în formula barometrică (3), găsim:

$$z - z_1 = T_1 \left(R \log \frac{p_0}{p} - 42{,}84\right), \qquad (5)$$

relație care dă pe z în zona izotermă pentru orice valoare a lui p și care se putea deduce direct din (3), aplicat între limitele z_1 și z cu media (în acest interval constantă) T_1:

$$z - z_1 = T_1 R \log \frac{p_1}{p} = T_1 \left(R \log \frac{p_0}{p} - R \log \frac{p_0}{p_1}\right),$$

Pentru stratul isoterm (indicele 1 indică valorile la cota inițială z_1), dacă voim să punem în legătură caracteristicele lui cu cele dela nivelul mării, trebue să trecem prin acelea dela cota z_1:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{p_0}{p_1}\frac{p_1}{p}$$

și conform legei lui *Mariotte*, aplicabilă numai în stratul izoterm:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{p_0}{p_1}\frac{\varpi_1}{\varpi} = \left(\frac{p_0}{p_1}\frac{\varpi_1}{\varpi_0}\right)\frac{\varpi_0}{\varpi}$$

sau, punând valorile numerice:

$$\frac{p_0}{p} = 1{,}3211\,\frac{\varpi_0}{\varpi}\,. \qquad (6)$$

Dacă se dă ϖ, găsim mai întâiu p prin (6) și apoi îl introducem în (5).

Iată încă câteva relațiuni utile (aplicabile numai în troposferă), bazate pe legea de repartiție politropică (cu $a = 0^0{,}65$ de fiecare $100\ m$):

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{aR} \quad \text{cu } aR = 0{,}19.$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5{,}256}$$

$$\frac{\varpi}{\varpi_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0{,}81}$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{1,235}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{0,235}$$

$$\frac{\varpi}{\varpi_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{4,256}$$

$$\left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{0,235} = \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)$$

$$\frac{\varpi}{\varpi_0} = \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^{4,256}$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,19} = \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)$$

și

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^{5,256}.$$

Cum a real are o valoare sensibil diferită de gradientul $0^0,975$ corespunzător unei repartiții după formula adiabatică, aceasta arată că, atribuirea unei asemenea repartițiuni troposferei reale trebue privită numai ca o limită, către care se tinde pentru aerul uscat *mișcat* (vezi mai departe explicația acestei tendințe).

Deasemenea nu se poate susține că legea politropică menționată ar trebui logic să fie prelungită treptat și în stratosferă (sensibil mai liniștită) cu tinderea lui z către 1, deoarece în straturile superioare ale atmosferei condițiile se schimbă foarte mult și intervin alte fenomene, despre cari s'a făcut mențiune în descrierea atmosferei reale.

6. Influența diferiților factori asupra stabilității atmosferei. Considerațiuni meteorologice.

Condițiile stabilității. Pentruca atmosfera în echilibru să fie stabilă, trebue ca repartiția temperaturei în sens vertical să fie astfel, încât orice masă de aer ar trece, din o cauză oarecare, dintr'un strat în altul, să tindă a reveni în stratul din care a pornit; în cazul contrar, când deplasarea inițială ar tinde să se continue, stratificarea este instabilă.

Echilibrul indiferent este caracterizat prin aceea că masa deplasată ar rămâne pe loc, deci fără tendința de a reveni sau de a-și continua mersul.

Se poate ușor vedea că repartiția după formula adiabatică corespunde unui echilibru indiferent.

Pentru a examina stabilitatea de echilibru a unei mase gazoase, să ne închipuim că o particulă s'a deplasat rapid dintr'un strat inferior în altul superior. In timpul deplasărei, particula se dilată adiabatic şi importă a se şti dacă densitatea masei, modificată astfel, este mai mică sau mai mare decât a stratului înconjurător, singurul criteriu pentru a conchide asupra tendinţei de revenire sau de continuarea mişcărei. Or, la o stratificare după formula adiabatică, masa deplasată într'un alt strat se va găsi cu densitatea corespunzătoare acestui strat, după însăşi definiţia repartiţiei şi prin urmare va rămâne pe loc, echilibrul fiind indiferent. Mai rezultă că o repartiţie, în care descreşterea densităţei în sens ascendent este mai rapidă (şi, deci, aceea a temperaturei mai înceată) ca la repartiţia adiabatică, asigură stabilitatea, pe când o repartiţie, în care descreşterea aceasta se face mai încet este instabilă.

Aşadar, dacă pentru aerul uscat $\varkappa < \gamma$, adică a este mai mic ca $0{,}98^0 \cong 1^0C/100\,m$, avem *stabilitate*, iar pentru $\varkappa > \gamma$ (gradient mai mare ca $1^0C/100$ m) *nestabilitate*, gradul de stabilitate sau nestabilitate crescând cu depărtarea, într'un sens sau într'altul, de gradientul adiabatic.

Dacă raportăm curbele $z(\theta)$ la două axe cu scări alese astfel ca 10^0C abscisă să fie egal cu $1000\,m$ înălţime, curbele repartiţiei adiabatice a temperaturei vor fi drepte înclinate la 45^0, pornind, la sol, dela diverse temperaturi. Cu cât dreptele vor fi mai puţin înclinate faţă de verticală (gradientul mai mic) cu atât vom avea o stabilitate mai mare, putând exista uneori şi gradiente negative, deci de o şi mai mare stabilitate.

O asemenea stratificaţie cu gradient de temperatură negativ, numită *inversiune*, se poate produce între straturi de diferite proveniente, stratul mai cald încălecând peste stratul mai rece.

Am văzut, că pentru a determina la orice altitudine cele trei cantităţi p, ρ şi T (sau θ), avem legea hidrostatică şi ecuaţia fizică a gazelor, a treia relaţie necesară fiind aceea a gradientului de temperatură, determinat mai precis *prin experienţă*. Teoria nu poate întradevăr preciza a priori decât anumite limite, între cari echilibrul real este îngrădit. Astfel, condiţiile mecanice de echilibru şi cele termice cer ca densitatea, respectiv temperatura, să crească de sus în jos, ceeace determină două stări limite de echilibru: 1) Din punct de vedere al densităţii şi fără considerarea temperaturei, avem un echilibru mecanic limită, în ipoteza unei densităţi uniforme, adică a unei *atmosfere omogene* (de oare ce, dacă densitatea ar descreşte de sus în jos echilibrul nu s'ar putea men-

ține). In acest caz presiunea în centrul unei mase sferice complet gazoase ar fi minimă față de orice altă ipoteză *(Poincaré)*. II). Privitor la echilibrul termic s'au făcut diverse ipoteze asupra modului cum se tinde către acest echilibru, adică cum căldura produsă în interiorul corpului ceresc este transportată la suprafață pentru a întreține radierea acesteia. Facem și aci abstracție de căldura solară, care, precum am văzut, încălzește atmosfera indirect prin pământ. Mai întâiu s'a admis că, căldura unui corp ceresc este transportată prin curenți ascendenți (convecțiune) cu dilatație și răcire, ceeace ar realiza un quasi-echilibru mecanic, analog cu ceeace se întâmplă la o stratificație adiabatică sau cu un gradient și mai mare, de temperatură, care însă, fiind instabilă, nu poate asigura o stare durabilă. *Edington* a admis, din contra,

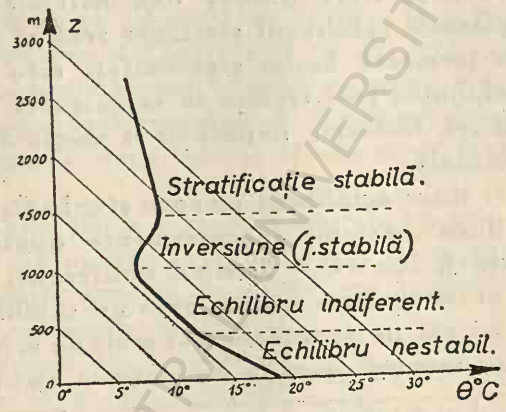


Fig. 175

că, căldura este transportată numai prin radiere internă, fără deplasare a materiei, ceeace ar constitui starea *radiativă* (din centru spre periferie), care are ca limită echilibrul *izoterm*.

Așa dar:

1°. O condiție de echilibru de natură pur *mecanică* este ca densitatea straturilor să crească de sus în jos, deci $\frac{d\rho}{dz} \leqq 0$ (în caz de quasi-echilibru cu curenți de convecțiune, ρ într'un punct z va reprezenta densitatea medie a stratului la cota z), limita $\frac{d\rho}{dz} = 0$ caracterizând ceeace s'ar putea numi *echilibrul omogen teoretic*. Acest caz teoretic implică, ca temperatura să crească foarte repede de sus în jos (pentruca, cu toată creșterea

necesară a presiunei statice înspre centru, densitatea să nu crească, ci să rămână constantă, ca la lichidele incompresibile). Echilibrul omogen constitue deci o limită, care implică gradientul maxim de temperatură și conduce la temperatura interioară maximă. Acest echilibru limită, cu un gradient de temperatură atât de mare, este, precum am arătat, foarte instabil și deci irealizabil.

2°. O altă condiție, de natură *termică*, este ca astrul să radieze din interior, deci $\frac{dT}{dz} \leq 0$, limita $\frac{dT}{dz} = 0$ caracterizând *echilibrul izoterm teoretic*. In acest caz va varia numai densitatea, echilibrul izoterm conducând la creșterea maximă de densitate, dinspre exterior. Această a doua limită este, precum am văzut, stabilă.

Intre aceste două stări limite, una instabilă și alta stabilă, trebuind să se găsească echilibrul staționar real, și cum stratificația adiabatică, care formează limita stabilității, este cuprinsă între aceste limite, echilibrul real trebue să se găsească ca medie, între cel adiabatic și cel izoterm, neputând fi precis determinat decât pe cale experimentală.

In rezumat; între echilibrul omogen și cel adiabatic nu putem avea decât echilibru nestabil (necesarmente quasi-echilibru convectiv), cel adiabatic (cu $dQ = 0$) fiind indiferent, iar între echilibrul adiabatic și cel izoterm putem avea un echilibru radiativ, cu atât mai stabil cu cât ne apropiem mai mult de echilibrul izoterm. Tabloul următor rezumă discuția de mai sus pentru *aerul uscat*:

Limita I Grad. de T = a maxim	Gradient de T mare, scade în sensul $\longrightarrow$	Gradient de T $a \cong 1°/100$m	Gradientul de T $a < 1°/100$ m, scade în sensul $\longrightarrow$	Limita II $a = 0$	Inversiune $a < 0$
$\frac{d\rho}{dz} = 0, \frac{dT}{dz} << 0$	$\frac{d\rho}{dz} < 0, \frac{dT}{dz} < 0$	$\frac{dQ}{dz} = 0$	$\frac{d\rho}{dz} < 0$ și $\frac{dT}{dz} < 0$ cuprinzând stările de echilibru reale	$\frac{dT}{dz} = 0, \frac{d\rho}{dz} << 0$	$\frac{dT}{dz} > 0$
Echilibru omogen teoretic, mare instabilitate (irealizabil)	Stări de echilibru nestabil sau quasi-echilibru convectiv.	Echilibru adiabatic (indiferent)	Stări de echilibru radiativ (stabil)	Echilibru izoterm teoretic (foarte stabil)	Stabilitate și mai mare (fenomen întâmplător)

Cazul real de chilibru stabil trebue să se găsească, așa dar, ca medie, între stratificația adiabatică și cea izotermă.

b) *Repartiția densității*. Presiunea variază cu înălțimea scăzând, precum am văzut, exponențial. Densitatea urmează o lege analoagă. Calculul arată că în atmosferă ρ trebue împărțit cu *10* la cca. fiecare *13 km* înălțime.

Teoretic admosfera s'ar întinde până la $\rho = 0$ și $p = 0$ și

d. e. la *150 km* altitudine, densitatea ei scade la 10^{-12} din valoarea ei la sol. Efectiv nu există o limită superioară a atmosferei, fiindcă aerul rarefiat trece treptat în spațiul interplanetar. Așadar, cât timp atracția pământului învinge forța centrifugă, care crește cu depărtarea dela axa pământească, există o atmosferă aparținând pământului. Limita (unde aceste două forțe se echilibrează) este, la ecuator, socotită la *6,6* raze pământești; după *Smoluchowski* avem *28000 km* la poli și *42000 km* la ecuator. La înălțimile inaccesibile omului următoarele fenomene luminoase ne informează asupra existenței atmosferei: la înălțimi de *60—70 km* apariția crepusculului; la *70—80 km* norii luminatori de noapte; la *80—800 km* lumina polară, la *100—300 km* aeroliții.

Dacă presupunem acum o atmosferă ce s'ar scoborî adânc într'un puț de mină, densitatea aerului la o adâncime de numai $3 \times 13 = 39\ km$ s'ar găsi înmulțită cu 10^3 deci egală cu *1,23*, întrecând astfel pe aceia a apei (vecină cu aceea a soarelui).

Dacă ținem însă seamă și de creșterea temperaturei cu profunzimea, această densitate ar fi atinsă de fapt ceva mai jos, la circa *50 km*.

Dar ecuația fizică a gazelor *perfecte* nu este aplicabilă la presiunile mari și ecuația gazelor *reale* dă o curbă diferită *ABC* (Fig. 176) pentru variația densității sub suprafața solului. Există un punct de inflexiune bruscă și o creștere rapidă în apropierea adâncimei de *48 km* (punctul *B*) La *100 km* (punctul *C*) densitatea ar atinge mai mult de *9/10* din densitatea limită ρ_0.

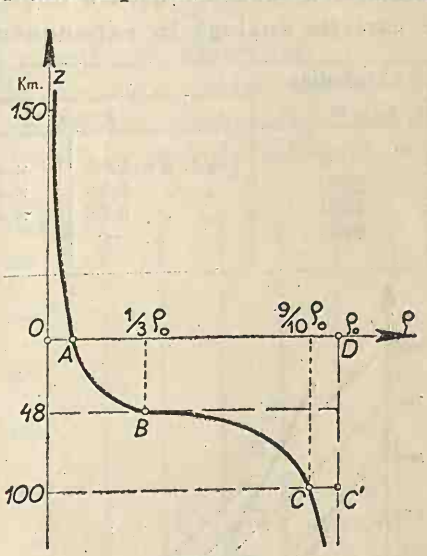


Fig. 176

Variația bruscă corespunde cu tranziția dela starea gazoasă la aceea lichidă.

c) *Influența umezelei.* S'a spus că aerul este, în general, amestecat cu aburi. Un metru cub de aer conține la o anumită temperatură o cantitate determinată de aburi, la întrecerea căreia se produc condensațiuni sub formă de picături (ceață). Cantitatea de aburi saturați dintr'un metru cub de aer depinde, așadar, de temperatură, fiind însă independentă de presiune. Iată în grame această cantitate pe m^3 la diferite temperaturi:

La θ^0	-10^0	0^0	10^0	20^0	30^0
Aburi g/m^3	2,1	4,9	9,4	17,4	30,4

Acești aburi în formă gazoasă prin mica lor cantitate nu influențează decât puțin stabilitatea aerului. Dacă însă se produc condensațiuni, prin căldura eliberată (circa *600 calorii de gram* sau *Calorii* de *kilogram* la 20^0 C), intervin modificări importante. Asemenea condensațiuni se pot produce de exemplu dacă aerul umed se dilată adiabatic. Prin același proces aerul nesaturat, dilatându-se adiabatic, se poate repede satura. Îndată ce începe condensația în picături, dacă dilatarea adiabatică continuă, temperatura scade mai încet de cât în cazul aerului uscat, după cum s'a mai explicat, din cauza căldurei de condensație eliberată.

Gradientul de temperatură al aerului umed, care în cazul unei stratificațiuni adiabatice (definită ca și pentru aerul uscat), este astfel mai mic, la straturile de lângă sol se reduce aproape la jumătatea gradientului din aerul uscat; cu cât ne urcăm mai sus în straturile superioare, din cauza conținutului de aburi mai mic la temperaturi mai joase, diferența gradientului față de stratificația adiabatică uscată devine din ce în ce mai mică, implicând o variație analogă în exponentul politropic $\varkappa$:

Altitudine m	Temperatura solului			
	$\theta = 0^0$ C		$\theta = 20^0$ C	
0	grad. $a = 0{,}62$	$\varkappa = 1{,}22$	grad. $a = 0{,}44$	$\varkappa = 1{,}15$
2000	„ „ 0,75	$\varkappa = 1{,}28$	„ „ 0,49	$\varkappa = 1{,}17$
4000	„ „ 0,88	$\varkappa = 1{,}35$	„ „ 0,56	$\varkappa = 1\,20$
6000	—		„ „ 0,63	$\varkappa = 1{,}23$

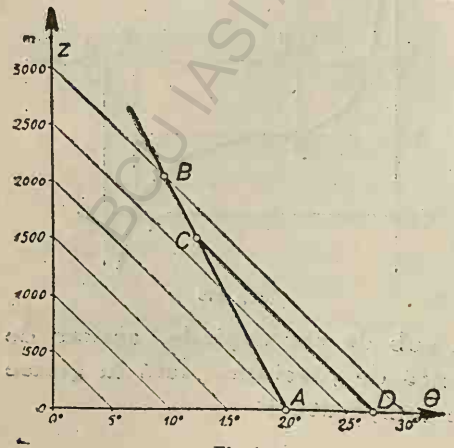


Fig 177

Ca exemplu al unei curbe adiabatice *umede*, să considerăm cazul următor: să presupunem că o masă de aer saturat, indiferent din ce motiv, d. e. izbindu-se de un mal, se ridică (Fig. 177) dela *A* la *B*, în care timp evident condensația crește, putând produce și ploaie. Dacă această masă de aer depășește dealul și coboară iarăși în vale, ea se încălzește la început după curba adiaba-

tică *umedă*, deoarece parte din căldură, din cauza evaporării parțiale, este absorbită de aburi, astfel că temperatura va crește în jos mai încet decât în cazul adiabaticei uscate. Din momentul însă (*C*), în care se vor fi evaporat ultimele picături de ceață, încălzirea în timpul coborârii se va face după adiabatica uscată. Rezultă că aerul, înapoindu-se la cota dela care a plecat (*D*), se va fi încălzit sensibil. In modul acesta se produce fenomenul numit *föhn*. Astfel se explică pentruce lanțurile de munți formează muchii de despărțire de climate. Regiunile ploioase sunt totdeauna regiuni de curenți umezi ascendenți, pe când regiunile de peste muchie, unde aerul, lipsit de o parte din umezeala lui, se coboară, sunt mai sărace în ploi și uscate. De ex. pe coasta vestică a Americei de Sud, unde domnește în medie vântul de vest (umed, fiindcă bate deasupra Oceanului Pacific) regiunea din apusul lanțului puternic al Cordilierilor este extrem de ploioasă și fecundă, pe când regiunea așezată dincolo de acești munți este secetoasă.

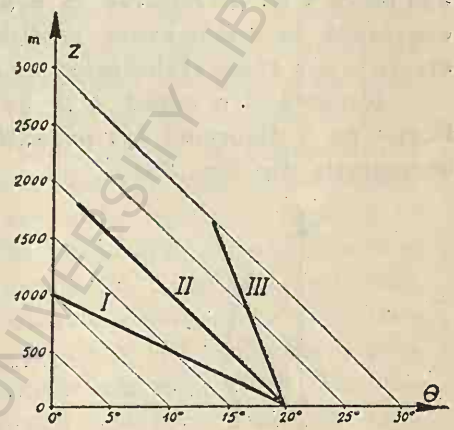


Fig 178

d) *Temperatura potențială*. Se numește astfel temperatura pe care o atinge o masă de aer prin *contracție adiabatică*, dacă din stratul în care se găsește se scoboară la o cotă de referință d. e. la nivelul mării, unde primește presiunea respectivă. Dacă stratificația este adiabatică (curba II), evident toate straturile vor poseda aceeași temperatură potențială. La un gradient de temperatură mai mare (curba I) sau mai mic (curba III) ca la o astfel de stratificație, corespunde nestabilitate, respectiv stabilitate. In cazurile curbelor I sau III din fig. 178 vom avea pentru straturile diferitelor altitudini temperaturi potențiale diferite.

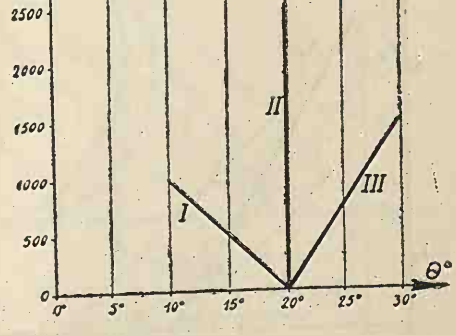


Fig. 179

Dacă aceste repartiţiuni de temperatură se raportează la temperatura potenţială, curbele de mai sus se transformă ca în figura următoare (Fig. 179). Se vede că în aerul uscat domneşte stabilitate sau nestabilitate, după cum temperatura potenţială creşte sau descreşte în sus.

Din punctul de vedere al repartiţiei temperaturei în masa fluidă, temperatura potenţială joacă acelaşi rol ca şi temperatura efectivă într'un fluid incompresibil cu dilataţie pozitivă, cum este apa peste $4^0 C$. Intradevăr la apă, dacă temperatura efectivă este constantă în masă, avem echilibru indiferent, dacă temperatura creşte în sus avem stabilitate, iar dacă descreşte în sus nestabilitate.

Raportând o curbă $z(\theta)$ ce caracterizează o anumită stratificaţie pe o diagramă $z(\theta$ potenţial), avem în cazul aerului uscat comparaţia din fig. 180.

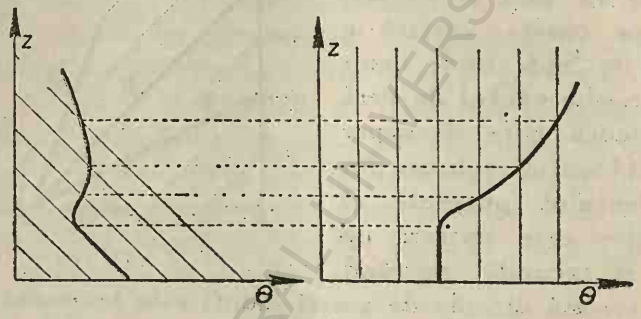


Fig. 180

Să considerăm acum un fenomen de amestec ce ar interveni în *straturi sfabile*, d. e. stratificaţia de pe diagrama fig. 181, dată de linia groasă.

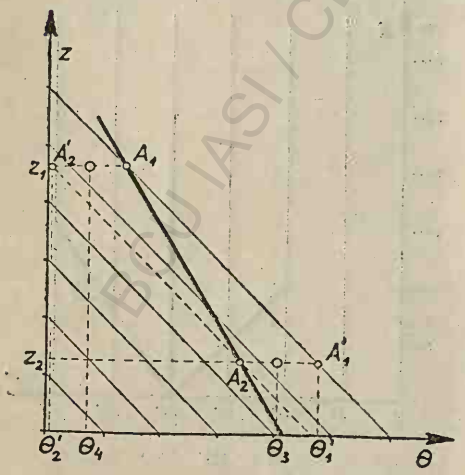


Fig. 181

Pentruca o masă de aer A_1 la cota z_1 să se amestece cu o altă masă A_2 la cota z_2, ele trebuesc aduse la aceiaşi cotă, d. e. A_1 adusă la z_2. In acest caz temperatura masei A_1 va creşte adiabatic la θ_1', astfel că A_1 la θ_1' cu A_2 la θ_2 se amestecă la cota z_2 primind o temperatură medie, în cazul unor mase egale media aritmetică, $\frac{\theta_1' + \theta_2}{2} = \theta_3$ (punctul dintre A_2 şi A'_1).

Dacă, invers, masa A_2 dela cota z_2 este dusă la cota z_1, unde va atinge temperatura θ_2' în mod adiabatic, amestecându-se cu masa din noua ei poziție, se va obține temperatura medie $\frac{\theta_2' + \theta_1}{2} = \theta_4$ (punctul dintre A_1 și A'_2). Se vede că în felul acesta, prin amestec masele A_1 și A_2 mutându-se pe aceeași adiabatică, ne apropiem de stratificația adiabatică. Astfel se petrec lucrurile în troposferă, unde avem amestecuri continue.

Având în vedere că o masă, venind la locul de amestec, își conservă temperatura potențială și că, temperaturile maselor de aer întâlnite într'un anumit loc diferă între ele înainte de amestec cu cât diferă și temperaturile lor potențiale, regula de amestecul maselor dela diferite cote se poate aplica la temperaturile lor potențiale. După cum la apă prin amestec repetat se uniformizează temperatura efectivă, la aer prin amestec repetat se uniformizează temperatura potențială, tinzând-se și într'un caz și într'altul la echilibrul indiferent (explicație anunțată anterior).

e) *Producerea norilor.* Schimbarea temperaturei potențiale într'o masă de aer stratificată se face în cea mai mare parte prin acțiunea solului, dar și prin condensație sau evaporare. De asemenea intervine și radiațiunea prafului existent în aer, iar în o măsură mai mică și radiațiunea aerului însuși, din care în special aburul și acidul carbonic au capacitate calorifică mai mare.

O răcire din partea solului, conduce totdeauna la o stratificație stabilă; fig. 182 arată acest proces, care se petrece seara și noaptea la suprafața solului. Se vede anume în ce mod, prin răcirea solului, straturi de aer din ce în ce mai groase se răcesc la rândul lor, în deobște prin radiația aburului din aer. Rezultă în modul acesta o repartiție de temperatură crescândă de jos în sus, adică o inversiune, care mărește stabilitatea. In regiunile muntoase, deseori seara văile se umple cu aer rece, care se coboară de pe versanți, scurgându-se apoi din amonte în aval (vânt de vale).

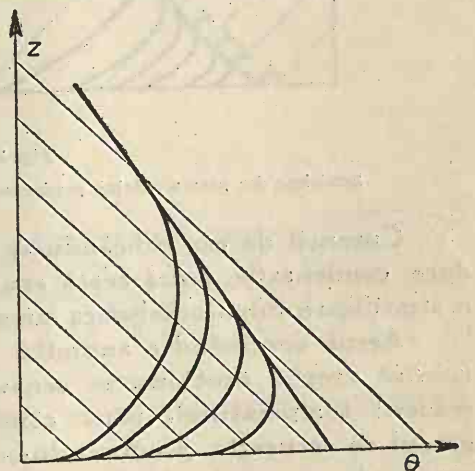


Fig. 182

Răcirea din partea solului producând seara o stratificație foarte stabilă.

O încălzire din partea solului dimineața produce o stratificare instabilă, din care cauză rezultă curenți ascendenți și, spre compensarea maselor, curenți descendenți corespunzători (Fig. 183). In modul acesta inversiunea din timpul nopții ($A_0 A_n$) este treptat compensată, limita superioară a încălzirei A_0, A_1, A_2,... A_n ridicându-se din ce în ce mai sus. Fiecare curent ascendent, care urmează, se ridică ceva mai sus ca cel ce l'a precedat și se împrăștie, turtindu-se acolo unde vine în echilibru. Aerul aflat între asemenea curenți ascendenți se coboară în jos spre a umple golurile produse. Intregul strat în stare indiferentă este astfel în continuu frământat. Prin dilatarea straturilor inferioare, ansamblul celor superioare este puțin deplasat în sus, ceeace pentru simplitate nu s'a figurat în fig. 183.

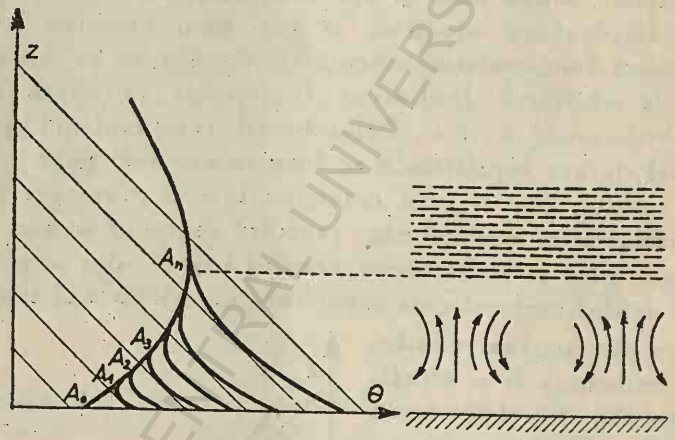


Fig. 183

Incălzirea din partea solului, producând dimineața o stratificare instabilă.

Curenții de aer ridicându-se la o înălțime suficientă, se produce condensație, adică ceață sau nori, urmând din acel moment o stratificare după adiabatica umedă. Lucrurile se petrec astfel:

Aerul conținând o anumită cantitate de aburi, umiditatea *relativă* crește continuu în sensul altitudinei, adică în sensul scăderii temperaturei, până când la o anumită cotă se atinge gradul de saturație, producându-se condensația. Până la acea cotă masele de aer sunt invizibile, deasupra ei apărând norii (Fig. 184).

In caz de repartiție uniformă a umezelei și a temperaturei de plecare, se produce și o condensare uniformă, astfel că baza norilor devine orizontală, norii părând că înnoată într'o masă de aer orizontală.

In caz de suficient de mică stabilitate a straturilor superioare, și anume atunci când gradientul de temperatură al straturilor superioare este mai mare decât gradientul adiabatic e umede din nori, aceștia primesc forță ascensională proprie.

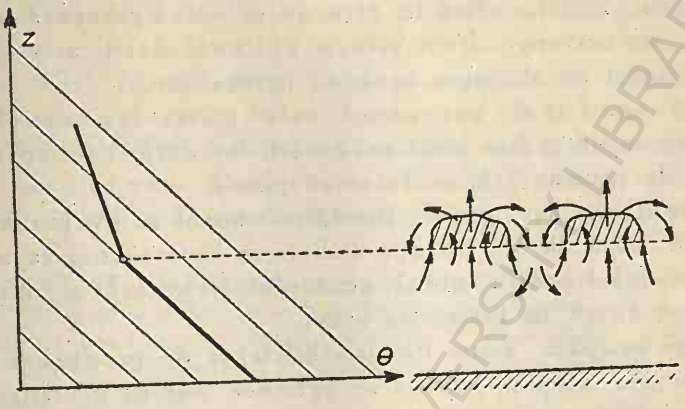


Fig. 184

Producerea de nori în urma condensării curenților ascendenți.

Pentru a preciza ideile să considerăm în fig. 185 o stratificare aproape adiabatică. Dacă admitem că într'o zi de vară solul

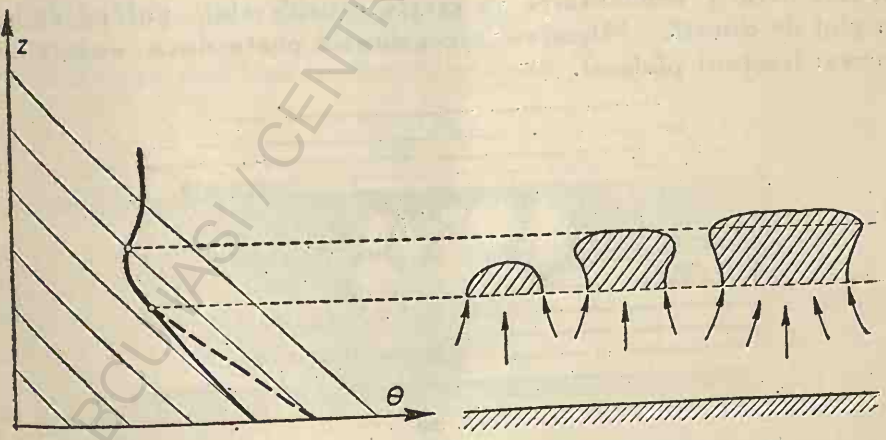


Fig. 185

Norul produs (linia punctată inferioară) ajunge într'un strat cu θ^0 mai mare decât după adiabatică umedă, urcându-se până la o inversiune (a doua orizontală punctată).

este încălzit puternic prin radiațiunea solară, stratul de aer în contact devine instabil (curba întreruptă) și sediul unor curenți de

convecțiune. Dacă aerul posedă o umiditate relativ mare (pâclă), curenții ascendenți vor atinge repede cota de condensație, și dacă stratul respectiv este puțin stabil, astfel ca aerul uscat să fie mai rece, adică mai greu decât aerul umed sosit, norul se ridică — continuându-se condensația conform adiabaticei umede — până la un strat foarte stabil, adică în care avem o temperatură mai mare sau chiar inversiune. Prin vitesa obținută norii ascendenți pot evident depăși pe alocurea zona de inversiune.

Dacă aportul de aer umed este mare, fenomenul descris poate dura mult și lua mari proporții, iar dacă condensația este suficient de pronunțată, se formează ploaie.

Aportul de aer umed încetând, norul se evaporează începând dela bază și se întinde sub zona inversiunei ca nor stratificat. In felul acesta norul acumulat (*cumulus*) se transformă într'un nor turtit în formă de strat.

Să ne ocupăm acum de posibilitatea de producere de nori în *regiuni șese* întinse. Dacă se produce aici o *depresiuni* barometrică, rezultă o afluență concentrică de aer în zona deprimată.

In modul acesta înălțimea masei mișcate în regiune se va mări, și cum din lături concură aer cald, gradientul de temperatură se va apropia din ce în ce mai mult de cel adiabatic. Prin intervenirea condensației la o anumită altitudine se poate produce atunci ușor instabilitatea aerului umed, și prin continuarea urcării condensarea va crește considerabil, putând dà loc la ploi de durată. Mișcarea ascensională poate dura uneori zile întregi (regiuni ploiase).

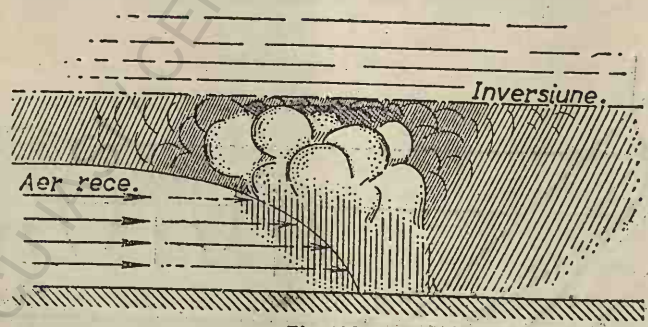


Fig. 186

Incursiunea unei mase de aer rece de-a-lungul unui front lung; aerul rece este ridicat în sus cu apariții de condensație.

Contrariu se produce în o regiune de *suprapresiune*. Aerul se îndepărtează radial, înălțimea stratului mișcat devine mai mică, gradientul de temperatură va descrește, mărindu-se astfel stabi-

litatea. Prin mișcarea descendentă a întregi mase de aer se împiedică considerabil curenții ascendenți, provocați de încălzirea din partea solului, condensația rămânând în limite neînsmnate.

Aceste fenomene meteorologice sunt influențate de rotația pământului.

In fine (Fig. 186) există și un al doilea mod de producere a furtunei, care se poate numi *furtună de răsturnare*; o incursiune de aer rece ridică în sus aerul cald, cu apariție de condensație. Acest fenomen se petrece de-a-lungul unui front întins. După furtună se stabilește o temperatură sensibil mai joasă, pricinuită de afluența aerului rece. Forța ei ascensională, produsă de condensare, mărește și mai mult violența mișcării.

Aplicația Nr. 57. Un piston ermetic de suprafață Ω este suspendat prin două resorturi verticale la o depărtare h de fundul unui cilindru. Tensiunea elastică a resorturilor este proporțională cu deformația lor longitudinală, k fiind forța care produce lungirea resorturilor cu unitatea de lungime (constanta resortului).

A se calcula volumul de aer V, măsurat la presiunea exterioară p_0, care trebue pompat (prin A) în interiorul cilindrului, aflat inițial la presiunea p_0, pentru ca pistonul să atingă depărtarea H de fundul cilindrului.

Se va admite că temperatura nu variază în cursul operațiunei.

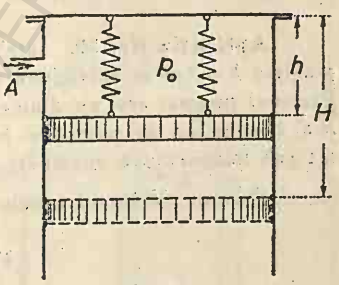


Fig. 187

Soluție. La volumul inițial Ωh adăugându-se volumul V, ambele măsurate sub presiunea p_0, vom avea la finele cursei după legea lui *Mariotte* presiunea

$$\frac{(V+\Omega h)\,p_0}{\Omega H},$$

astfel că plusul de tracțiune al resorturilor va fi:

$$\left[\frac{(V+\Omega h)\,p_0}{\Omega H} - p_0\right]\Omega = K(H-h),$$

de unde:

$$V = (H-h)\left(\Omega + K\frac{H}{p_0}\right).$$

Vedem că greutatea pistonului nu intervine în calcul.

Aplicația Nr. 58. In cilindrul unui motor de aer comprimat se introduce prin A aer sub presiunea p_1, B fiind închis, până când aerul intrat în spațiul, inițial nul, dintre piston și fundul cilindrului, ocupă volumul V_1. In acest moment se închide intrarea A, iar pistonul este lăsat să expandeze până la o presiune mai mică p_2 care corespunde unui volum V_2, după care se înapoiază la poziția inițială, expulzând aerul prin B sub presiunea p_2.

Care este lucrul mecanic executat de aer în cursul acestei operaţiuni?

Răspuns. Până la închiderea lui A aerul execută sub presiune constantă lucrul:

$$p_1 V_1,$$

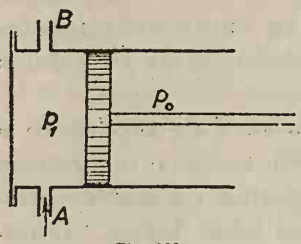


Fig. 188

iar după acel moment, prin expansiune, admisă izotermă, lucrul:

$$p_1 V_1 \log \frac{p_1}{p_2}.$$

La înapoiere lucrul efectuat de aerul din cilindru este negativ şi egal cu

$$-p_2 V_2 = -p_1 V_1.$$

Lucrul total executat de aerul din cilindru este, aşa dar:

$$p_1 V_1 \log \frac{p_1}{p_2}.$$

Este de notat că lucrul atmosferei p_0 pe faţa cealaltă a pistonului fiind la dus şi la înapoiere egal şi de semn contrar, va fi nul pentru o cursă completă a pistonului.

Aplicaţia Nr. 59. Într'un cazan de aer cilindric de diametru $D = 1\,m$ şi înălţime $h = 3\,m$ se introduce prin pompare *apă*, care presează aerul la $p = 15\,atm$. Pistonul pompei are un diametru $d = 5\,cm$ şi o cursă $S = 40\,cm$. Se cere numărul x al loviturilor de pompă şi lucrul mecanic necesar pentru a produce acest rezultat sub temperatură constantă.

Soluţie. Volumul aerului este la început:

$$V_0 = \frac{\pi D^2 h}{4} \qquad \text{la } p_0,$$

iar la fine (apa introdusă fiind considerată incompresibilă):

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} - x \frac{\pi d^2}{4} S \qquad \text{la } p.$$

Din aplicarea legei lui *Mariotte* pentru cele două stări deducem:

$$x = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{h}{S}\left(1 - \frac{p_0}{p}\right) = 2800 \text{ lovituri}.$$

Lucrul de compresiune este:

$$p_0 V_0 \log \frac{p}{p_0} = 65897 \text{ kgm}.$$

Aplicaţia Nr. 60. Un motor de aer comprimat, lucrând la *4 atmosfere*, este încălzit astfel ca aerul în timpul expansiunei să nu sufere nici o variaţie de temperatură. Care este puterea motorului, dacă el consumă $0{,}7\,m^3$ de aer comprimat pe minut, admiţând că aerul este expulzat la $p_0 = 1\,atm$?

Răspuns. Lucrul efectuat de aer la expandarea unui volum oarecare V dela p la p_0, este, în presupunerea unei evoluări izoterme:

$$pV \log \frac{p}{p_0}.$$

Lucrul efectuat pe secundă, adică puterea de comprimare a $\frac{0{,}7\ m^3}{60}$ aer pe sec, va fi:

$$p\frac{0{,}7}{60}\log\frac{p}{p_0} = 4 \times 10333\ \frac{kg}{m^2} \cdot \frac{0{,}7}{60}\log\frac{4}{1}\ m^3/sec = 668{,}5\ kg\,m/sec = 8{,}9\ CP.$$

Aplicația Nr. 61. De o parte și de alta a unui piston de suprafață Ω se găsesc două gaze diferite de egală masă și egală presiune p, ocupând respectiv lungimile de cilindru a și b (Fig. 189) Ce lucru trebue executat în o mișcare a pistonului spre gazul mai puțin dens, care se află la dreapta (presupunând $a < b$), pentru ca densitățile lor să-și schimbe valorile între ele?

Răspuns. Fie x_1 cursa necesară care dă acest rezultat. Pentru o cursă oarecare x presiunile devenind respectiv p_1 și p_2, vom avea sub temperatură constantă:

$$p\,a = p_1\,(a + x),$$
$$p\,b = p_2\,(b - x).$$

Lucrul ce va trebui executat din exterior în timpul cursei x_1 va fi egal și de semn contrar cu lucrul executat de gaze pe cele două fețe ale pistonului, fiind deci:

$$\mathfrak{C} = \int_0^{x_1} (p_2 - p_1)\,\Omega\,dx = p\,\Omega \int_0^{x_1} \left(\frac{b}{b-x} - \frac{a}{a+x}\right) dx.$$

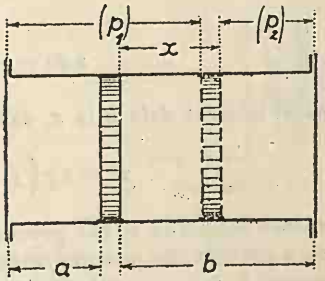


Fig. 189

Masele gazelor fiind egale, pentru a se schimba densitățile trebue ca a să devie b și vice-versa, adică

$$x_1 = b - a,$$

de oarece volumul total este împărțit inițial și final în câte două volume, cari sunt invers proporționale cu densitățile respective (masa fiind aceeași) și cum aceste densități sunt aceleași în ambele cazuri, împărțirea nu se poate face de cât într'un singur mod.

Aceasta se poate de altfel deduce și prin calcul din cele două relații, ceea inițială:

$$a\,\rho_1 = b\,\rho_2$$

și ceea finală:

$$(a + x_1)\,\rho_2 = (b - x_1)\,\rho_1$$

prin eliminarea raportului

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Valoarea lui x_1, introdusă în expresia lucrului mecanic, dă:

$$p\,\Omega\,(b - a)\ \log\frac{b}{a}.$$

Aplicația Nr. 62. Într'un vas cilindric de secțiune Ω, plin cu aer la presiunea exterioară p_0, se lasă să cadă un piston de greutate G. La ce distanță x_1

de fund, pistonul va intra momentan în repaus, dacă se neglijează frecarea lui cu pereții cilindrului și orice schimbare de temperatură?

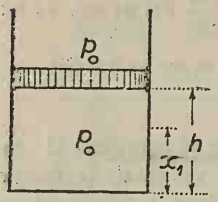


Fig. 190

Răspuns. Lucrul pozitiv executat de greutatea pistonului și de presiunea exterioară p_0 pe înălțimea $h - x_1$ fiind egal și de semn contrar cu lucrul negativ executat de aerul închis în cilindru (întrucât forța vie, desvoltată la început, redevine nulă în acel moment), vom avea pentru aflarea lui x_1 egalitatea:

$$(G + p_0 \Omega)(h - x_1) = p_0 h \Omega \log \frac{h}{x_1}.$$

Alta va fi valoarea x_0 a lui x pentru poziția de echilibru, pentru care trebue satisfăcută relația:

$$G + p_0 \Omega = \frac{h_0}{x_0} p_0.$$

Pistonul, căzând în condițiunile enunțiului, va oscila de fapt de o parte și de alta a acestei poziții de echilibru, pe care o depășește numai grație forței vii ce posedă în acel moment. Ecuația de mișcare a pistonului este:

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{G + \Omega p_0 - \Omega p}{G}$$

sau, deoarece $v dt = -dx$ iar $p = \frac{p_0 h}{x}$:

$$v\,dv = -dx\left(g + \frac{g \Omega p_0}{G}\right) + \frac{\Omega g p_0 h}{G} \frac{dx}{x},$$

care, integrat dela h la x, dă:

$$v^2 = 2g\left(1 + \frac{\Omega p_0}{G}\right)(h - x) - \frac{2 \Omega g p_0 h}{G} \log \frac{x}{h},$$

ceeace concordă cu (1) pentru $v = 0$. De fapt pentru $v = 0$ avem și soluția $x_1 = h$, care corespunde poziției inițiale, oscilațiile având loc între cele două poziții extreme h și x cu vitesă nulă. Aceasta se verifică atât la ecuația (1) cât și la ultima.

Aplicația Nr. 63. Care este, teoretic, înălțimea maximă de aspirație a unei pompe la altitudinea de *2500 m* deasupra mării și la *15°*, dacă greutatea volumică a aerului la nivelul mării și la *15°* este $\varpi_0 = 1{,}2344$?

Răspuns. Avem, cu $z_0 = 0$

$$z = H \log \frac{p_0}{p},$$

unde

$$H = RT = 29{,}27 \times 273\left(1 + \frac{\theta}{273}\right) = 7992\left(1 + \frac{\theta}{273}\right),$$

deci:

$$2500\,m = 7992\left(1 + \frac{15}{273}\right) \log \frac{p_0}{p}.$$

Dar

$$p_0 = 10405\ kg/m^2,$$

iar

$$\log \frac{p_0}{p} = 2{,}302585 \log_{10} \frac{p_0}{p}.$$

Calculând găsim:

$$p = 7735\ kg/m^2.$$

Înălțimea piezometrică sau reprezentativă a acestei presiuni este (ϖ pentru apă fiind $1000\ kg/m^3$):

$$\frac{p}{\varpi} = 7{,}735\ m.$$

In practică, această înălțime de aspirație nu va putea fi atinsă, din cauza aerului ce se degajează din apă și din cauza frecărilor apei în conducta de aspirație și în pompă.

Aplicația Nr. 64. Suprapresiunea dintr'un vas plin cu gaz este măsurată cu un manometru deschis (d. e. cu mercur) arătând $6{,}4\ atm$ de câte $1\ kg/cm^2$. Care este presiunea absolută p a gazului, dacă starea barometrului de mercur arată o presiune exterioară p_0 de $670\ mm$?

Răspuns. Avem:

$$p - p_0 = 6{,}4\ atm$$

și cum:

$$\frac{p_0}{\varpi_1} = 67\ cm$$

cu

$$\varpi_1 = 0{,}013596\ kg/cm^3$$

rezultă:

$$p_0 = 0{,}911\ kg/cm^2 \text{ (sau } atm)$$

și

$$p = 6{,}4 + p_0 = 7{,}311\ atm.$$

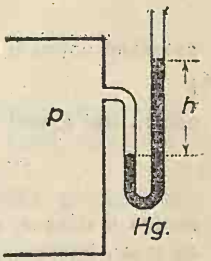


Fig. 191

Aplicația Nr. 65. Citirea unui vacuum-metru cu apă (manometru pentru presiuni mai mici ca presiunea atmosferică, arătând complementul presiunei față de p_0) este de $h = 22\ mm$. Care este presiunea din interior, dacă pentru exterior starea barometrului de mercur este de $69{,}5\ cm$?

Răspuns. Avem

$$p = p_0 - \varpi_1 h.$$

Dar:

$$\frac{p_0}{\varpi_1} = 69{,}5\ cm.$$

Greutatea volumică a mercurului fiind ceea arăta în exemplul precedent, rezultă

$$p_0 = 0{,}9449\ atm,$$

$$p = 0{,}9449 - 2{,}2 \times 0{,}001 = 0{,}9427\ atm.$$

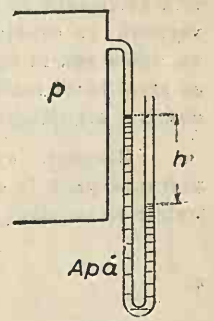


Fig. 192

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicația Nr. 66. O varietate a manometrului diferențial, constituit de obiceiu dintr'un singur tub U (numit și sifon), constă din o serie de n sifoane, a căror jumătate inferioară este plină cu mercur, cea superioară fiind plină cu apă pentru transmiterea presiunei. La o denivelare oarecare, suprafețele de separație se vor găsi pe două planuri orizontale distanțate cu înălțimea z, citită pe o scară dublă. Să se găsească relația dintre suprapresiunea p din cazan (față de presiunea exterioară p_0) și citirea z.

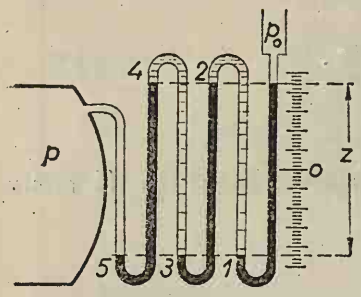


Fig. 193

Răspuns. Dacă ϖ și ϖ_1 sunt greutățile volumice ale apei și mercurului, presiunile în cele 5 suprafețe de separație, numerotate pe figură, sunt respectiv:

$$p_1 = p_0 + \varpi_1 z$$

$$p_2 = p_1 - \varpi z$$

$$p_3 = p_2 + \varpi_1 z$$

$$p_4 = p_3 - \varpi z$$

$$p = p_4 + \varpi_1 z.$$

însumând obținem:

$$p = p_0 + z(3\varpi_1 - 2\varpi),$$

pentru trei tuburi sifoane și

$$p = p_0 + n z\left(\varpi_1 - \frac{n-1}{n}\varpi\right)$$

pentru n sifoane, ceeace arată că utilitatea aparatului constă în reducerea înălțimei coloanei, întrebuințându-se în schimb o coloană multiplă.

Aplicația Nr. 67. Un tub de lungime l plin cu aer la presiunea atmosferică exterioară p_0 și al cărui capăt superior este la început închis, este cufundat vertical, cu capătul deschis la adâncimea h, în lichid.. *a)* La ce înălțime z_0 se va ridica apa în tubul închis? *b).* Dacă capătul superior se deschide brusc, să se arate la ce înălțime z (sau b deasupra nivelului din vas) apa va țâșni în tubul deschis, neglijându-se frecările.

Răspuns. a) Tubul fiind la început închis la capătul superior, lichidul va pătrunde până la o înălțime z_0, comprimând aerul din interior la presiunea p_1, care trebue să satisfacă relațiile:

$$l p_0 = (l - z_0) p_1 \quad \text{(legea lui } \textit{Mariotte}\text{)}$$

și

$$p_1 + \varpi z_0 = p_0 + \varpi h \quad \text{(legea hidrostatică)},$$

de unde prin eliminarea lui p_1 rezultă ecuația în z_0

$$z_0^2 - z_0\left(l + h - \frac{p_0}{\varpi}\right) + l h = 0.$$

b) Să presupunem că secţiunea Ω a vasului (exclusiv secţiunea tubului) este foarte mare în raport cu secţiunea ω a tubului, astfel că, în cursul mişcărei, planul liber din vas să nu varieze decât în mod neglijabil. In momentul când apa ţâşnitoare se va opri în tub, energia potenţială a lichidului W va deveni egală cu cea iniţială (forţa vie fiind nulă în ambele poziţii). W faţă de planul de apă din vas, cu eliminarea unei constante (egală cu W_0 al lichidului, presupus că ar umple toată capacitatea vasului până la planul de apă), este iniţial:

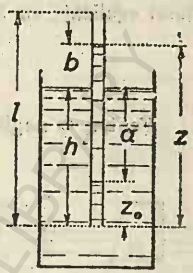


Fig. 194

$$\frac{\varpi a^2 \omega}{2}.$$

W final, după deschiderea bruscă a tubului, adică la înălţarea apei în tub cu b deasupra planului liber, cu eliminarea aceleaşi constante, este:

$$\frac{\varpi b^2 \omega}{2}.$$

Rezultă

$$b = a = h - z_0$$

sau

$$z = 2h - z_0$$

sau (înălţimea de ţâşnire):

$$z - z_0 = 2(h - z_0).$$

Se poate face comparaţie cu deformaţia unui resort, prealabil întins, care, fiind lăsat în mod brusc liber, capătă o deformaţie egală în sens opus, adică dincolo de poziţia sa de echilibru (neglijând viscozitatea şi frecările) *)

Dacă raportul ω/Ω nu este neglijabil, luând ca plan de referinţă planul liber final, care va fi scoborât cu

$$\varepsilon = (a + b)\frac{\omega}{\Omega}$$

faţă de poziţia lui iniţială, egalitatea lui W, pentru cele două poziţiuni extreme de repaus, se exprimă riguros prin relaţia:

$$\frac{\varpi \Omega \varepsilon^2}{2} + \frac{\varpi \omega a^2}{2} = \frac{\varpi \omega b^2}{2}$$

sau, ţinând seamă că $\varepsilon \Omega = (a + b)\omega$:

$$(a + b)^2 \frac{\omega}{\Omega} + a^2 = b^2$$

sau

$$(a + b)\frac{\omega}{\Omega} = b - a, \qquad (1)$$

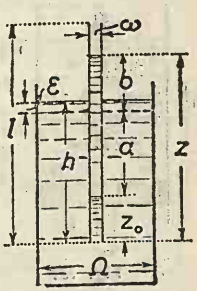


Fig 195

care împreună cu relaţia geometrică:

$$h - z_0 = a + (a + b)\frac{\omega}{\Omega} \qquad (2)$$

*) Fenomenul se mai poate compara cu deformaţia unui resort vertical sub acţiunea unei greutăţi, legată la capătul inferior, care este lăsată să cadă brusc. După cum această deformaţie este dublul aceleia ce se obţine prin atârnarea statică a aceleaşi greutăţi, tot astfel nivelul din tub, sub impulsia forţelor ce lucrează dinamic, se ridică la dublul ridicărei statice.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

determină pe a și b și deci suma:

$$a + b = z - z_0 .$$

Această înălțime a țâșnirei rezultă însă deodată, adunând (1) cu (2), după înmulțirea ultimei egalități cu 2:

$$a + b = z - z_0 = 2 (h - z_0) \frac{\Omega}{\Omega + \omega} .$$

Pentru ω neglijibil față de Ω cădem peste expresia de mai înainte.

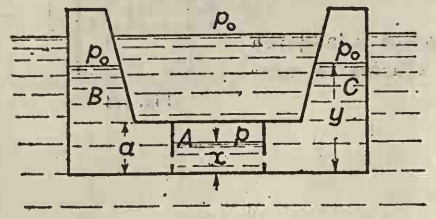


Fig. 196

Aplicația Nr. 68. La docul plutitor din figură lăsându-se a se scurge apă în spațiile B și C, permanent sub p_0, docul se scoboară iar aerul din spațiul dela fund A, inițial plin cu aer sub presiunea atmosferică p_0, se comprimă prin pătrunderea apei. Pentru ridicarea docului apa din B și C se pompează, aerul din A expulzând apa pătrunsă. Care este relația între x și y, înălțimile de apă în A și B (sau C)?

Răspuns. Dacă p este presiunea aerului comprimat în A, legea hidrostatică dă:

$$p = p_0 + \varpi (y - x) ,$$

iar pentru acest aer legea lui *Mariotte* dă:

$$a p_0 = (a - x) p$$

și, punând $p_0 = \varpi h_0$, rezultă prin eliminarea lui p:

$$x^2 - x (a + h_0 + y) + a y = 0 .$$

Aplicația Nr. 69. Prin ridicarea pistonului B aflat la distanța a de fund, aerul din cilindrul C, care se găsea la presiunea exterioară p_0, se comprimă. Să se găsească deplasarea x a pistonului, necesară pentru ca ghiuleaua de greutate G, care închide orificiul de fund al vasului A plin cu apă, suprapus cilindrului, să fie săltată, dimensiile ghiulelei și orificiului fiind cele din figură.

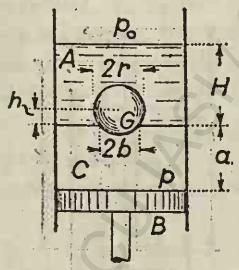


Fig. 197

Soluție. Presiunea verticală pe ghiulea este, adăogând (și scăzând) presiunea, ce s'ar exercita pe calota inferioară dacă ar fi și ea muiată, spre a completa subpresiunea sferei întregi:

$$P = \pi b^2 (p_0 + \varpi H) + \frac{1}{3} (r - h)^2 (2r + h) \varpi - \frac{4}{3} \pi r^3 \varpi .$$

Trebue să avem deci în momentul săltărei ghiulelei sub acțiunea presiunei p a aerului comprimat: $p \pi b^2 > G + P$.

După legea lui *Mariotte* (făcând abstracție de calota ghiulelei în evaluarea volumelor de gaz): $p (a - x) = p_0 a$, de unde:

$$x > a \left(1 - \frac{\pi p_0 b^2}{G + P}\right) .$$

Aplicația Nr. 70. In vasul din fig. 198 presiunea p pe ambele suprafețe Ω este la început aceeași. Partea din stânga a vasului este acoperită cu un piston, cea din dreapta cu un fund fix. Cu cât trebue ridicat pistonul, pentruca diferența de nivel, ce se va stabili în cele două părți, să fie egală cu e?

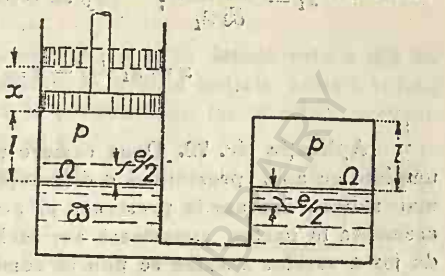


Fig. 198.

Răspuns. Suprafața din stânga se va ridica cu $\frac{e}{2}$, cea din dreapta se va coborî cu $\frac{e}{2}$, iar presiunile respective reducându-se la p_1 și p_2, vom avea mai întâiu prin hidrostatică:

$$p_1 + \varpi\, e = p_2.$$

Legea lui *Mariotte* (presupunând temperatura constantă) dă: a stânga

$$p\, l = p_1 \left(l + x - \frac{e}{2} \right),$$

iar la dreapta:

$$p\, l = p_2 \left(l + \frac{e}{2} \right).$$

Din aceste trei ecuații se poate elimina p_1 și p_2, obținându-se e.

Pentru cazul particular când $e = l$, obținem prin eliminarea lui p_1 și p_2

$$x = \frac{e}{2} \frac{4p + 3\varpi\, e}{2p - 3\varpi\, e}.$$

Aplicația Nr. 71. Pe pistonul Ω_1 de greutate G_1 și de grosime neglijabilă se potrivește ermetic un cilindru vertical de greutate G, la început plin cu aer la presiunea p_0. Acest sistem plutește într'un vas cilindric de secțiune Ω_2 plin cu lichid ϖ. Să se găsească pentru echilibru lungimile x, y, z, cunoscându-se greutatea G_2 a lichidului.

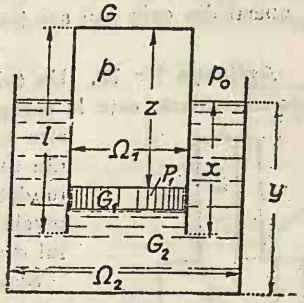


Fig. 199

Soluție. Punem $x - (l - z) = x_1$. Echilibrul pistonului impune egalitatea

$$p_0 + \varpi\, x_1 = p + \frac{G_1}{\Omega_1}.$$

Legea lui *Mariotte* procură egalitatea:

$$p_0\, l = p\, z.$$

Expresia subpresiunei dă (neglijând greutatea aerului din clopot și grosimea pistonului):

$$G + G_1 = \varpi\, \Omega_1\, x_1,$$

iar greutatea lichidului conduce la egalitatea:

$$G_2 = \varpi (\Omega_2 y - \Omega_1 x_1).$$

Rezultă, cu eliminarea lui p:

$$x_1 = \frac{G + G_1}{\varpi \Omega_1}; \qquad y = \frac{G + G_1 + G_2}{\varpi \Omega_2}; \qquad z = \frac{\Omega_1 p_0 l}{\Omega_1 p_0 + G},$$

$$x = x_1 + l - z = \frac{G + G_1}{\varpi \Omega_1} + \frac{G l}{\Omega_1 p_0 + G}.$$

Aplicația Nr. 72. Două camere prismatice de egală secțiune orizontală sunt umplute cu apă, prezintând o diferență de nivel h. Camera din stânga cu nivelul mai ridicat are aer la presiunea p_0 pe o înălțime $h/2$. Camera din dreapta are de asemenea în partea superioară aer închis la aceeași presiune p_0. Dacă în partea de jos a vaselor acestea se pun în comunicație, d. e. printr'un orificiu O, se cere a se găsi, care va fi noua diferență de nivel h' care se va stabili, cunoscând că fenomenul se petrece izoterm.

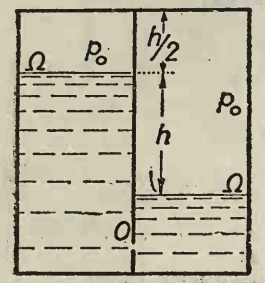


Fig. 200

Răspuns. Fie x deplasarea în jos și în sus, respectiv, a celor două nivele. Vom avea:

$$2x + h' = h.$$

Pentru presiunile finale de aer p_1 și p_2 din camerile din stânga și din dreapta avem, după legea lui *Mariotte*:

$$p_0 \frac{h}{2} = p_1 \left(\frac{h}{2} + x \right)$$

$$p_0 \frac{3h}{2} = p_2 \left(\frac{3}{2} h - x \right).$$

Legea hidrostatică dă pe de altă parte:

$$p_1 + \varpi h' = p_2.$$

Prin eliminarea lui p_1, p_2 și x din aceste patru relațiuni, găsim ecuația în h_1

$$h'^3 - 4h \left(\frac{p_0}{\varpi} + h \right) h' + 4 \frac{p_0}{\varpi} h^2 = 0.$$

Una numai din cele trei soluțiuni ale ecuației convine problemei.

Aplicația Nr. 73. Un tub cilindric de secțiune ω și lungime l, închis la partea superioară, este la început plin cu aer la presiunea p_0 și are capătul inferior în comunicare cu un tub mai larg de secțiune Ω; acest din urmă tub este la început plin cu apă și complet cufundat într'un vas, astfel că baza lui superioară este la nivelul apei din vas. Dacă ridicăm ansamblul cu a, nivelul din tub se ridică numai cu z. Să se găsească z.

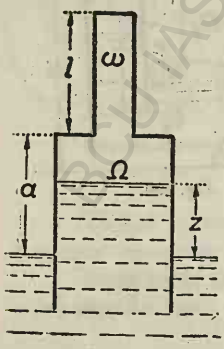


Fig. 201

Soluție Dacă p este presiunea de aer atinsă în interiorul tuburilor la sfârșitul deplasării, legea lui *Mariotte* dă:

$$p_0 \omega l = p \left[\omega l + \Omega (a - z) \right].$$

Legea hidrostatică dă:

$$p_0 = p + \varpi z.$$

Prin eliminarea lui p obținem:

$$z^2 - \left(l\frac{\omega}{\Omega} + \frac{p_0}{\varpi} + a \right) z + a\frac{p_0}{\varpi} = 0.$$

Aplicația Nr. 74. Două pistoane de secțiune Ω și ω, legate prin o tijă de lungime l, sunt adaptate la doi cilindri orizontali, în poziția inițială arătată în fig.. Între pistoane și în exterior se găsește aer la presiunea p_0, iar în tubul vertical, care prelungește cilindrul orizontal cel mare, se găsește lichid ϖ la înălțimea h deasupra axei orizontale. Dacă lăsăm ansamblul pistonului să se miște, cedând presiunei apei din tubul vertical, să se găsească cu cât se va scobori suprafața liberă, presupunând că s'au amortisat oscilațiile provocate prin energia potențială posedată inițial în plus, față de poziția finală de echilibru.

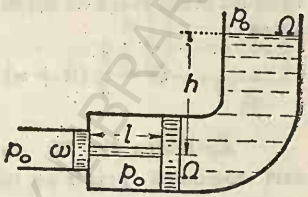


Fig. 202

Răspuns. Fie x această cantitate, care va reprezenta totodată deplasarea pistonului. Vom avea prin legea lui *Mariotte*:

$$p_0 \Omega l = p\,[\omega x + \Omega (l - x)].$$

Echilibrul sistemului format de pistoane cere ca:

$$\Omega [\varpi (h - x) + p_0] - \Omega p + \omega p - \omega p_0 = 0.$$

Punând:

$$\frac{\Omega - \omega}{\Omega} = \alpha$$

și eliminând pe p, găsim ecuația în x:

$$x^2 - \left(h\frac{l}{a} + \frac{\alpha p_0}{\varpi} \right) x + \frac{lh}{\alpha} = 0.$$

Aplicația Nr. 75. Două tuburi de forma arătată în figură și de diametre neegale, în cari se găsește apă la aceiași înălțime, sunt închise prin două pistoane, solidarizate prin o tijă de lungime l; pistoanele au respectiv diametrele tuburilor și închid între ele aer la presiunea inițială p_0.

În această poziție sistemul nu este evident în echilibru și are nevoie să fie ținut într'un mod oarecare.

Ce lucru mecanic trebue întrebuințat pentru a aduce ansamblul pistoanelor la poziția extremă din stânga, presupunând tubul orizontal din stânga suficient de lung?

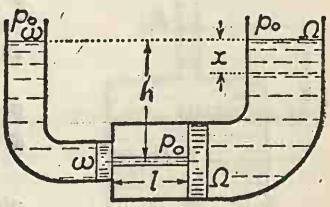


Fig. 203

Răspuns. Dacă nivelul Ω se scoboară cu x, nivelul ω se ridică cu aceiași cantitate. Lucrul efectuat pe cele două fețe de piston în contact cu lichidul va fi respectiv:

$$\mathfrak{G}_1 = \varpi \Omega \int_0^l (h - x)\, dx + p_0 \Omega l$$

$$\mathfrak{G}_2 = -\varpi \omega \int_0^l (h + x)\, dx - p_0 \omega l$$

Lucrul negativ de compresiune al aerului dintre pistoane (efectuat pe celelalte două fețe ale acestora) este:

$$\mathfrak{C}_3 = p_c \Omega l \log \frac{\omega}{\Omega} .$$

Așadar, lucrul total efectuat de fluide este $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3$ și, fiind negativ, va necesita din afară un lucru pozitiv egal în valoare absolută, deci $-(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)$, adică

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}(\Omega + \omega)\,\varpi\, l^2 - l(\varpi h + p_0)(\Omega - \omega) - p_0 \Omega l \log \frac{\omega}{\Omega} .$$

Aplicația Nr. 76. În două vase de capacitate: $V_1 = 2{,}5\,m^3$ și $V_2 = 2\,m^3$, cari comunică printr'un tub subțire recurbat în U, plin cu mercur, se găsesc două mase egale dintr'un același gaz la aceiași temperatură $\theta_0 = 17^0$. La ce temperatură trebue încălzit gazul din primul vas, pentruca nivelul de mercur să fie același în ambele brațe ale tubului de legătură?

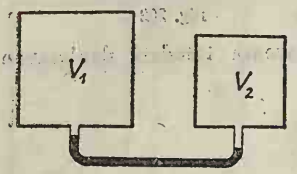


Fig. 204

Răspuns. După ecuația fizică (*Mariotte* și *Gay-Lussac*) vom avea în vasul cel mic:

$$p_2 V_2 = GR(273 + 17),$$

iar în cel mare, dacă încălzim la 0^0

$$p_1 V_1 = GR(273 + 0).$$

Condiția $p_1 = p_2$ dă:

$$273 + 0 = (273 + 17)\frac{V_1}{V_2},$$

de unde:

$$\theta = 89^0{,}5 .$$

Aplicația Nr. 77. La *manometrul cu pistoane* avem două pistoane de diametre diferite D și d, solidare între ele, cari se ridică în cilindrii respectivi prin presiunea p de măsurat a unui gaz, ce se introduce sub pistonul cel mic, antrenând și lichidul aflat deasupra pistonului mare.

Ce relație există între p și citirea z, știind că între pistoane avem constant presiunea exterioară p_0 și că greutatea pistoanelor este neglijabilă?

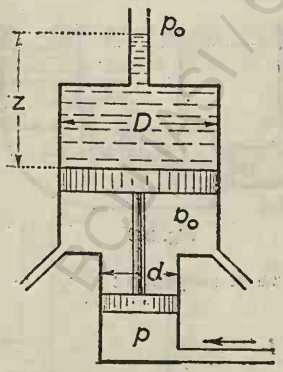


Fig. 205

Răspuns. Avem pentru echilibrul ansamblului de pistoane:

$$\varpi z \frac{\pi D^2}{4} + (p_0 - p)\frac{\pi d^2}{4} = 0,$$

de unde:

$$p = p_0 + \varpi z \left(\frac{D}{d}\right)^2 .$$

Se vede că, întrebuințând un raport $\frac{D}{d}$ mare, se reduc citirile, deci și înălțimea aparatului.

Aplicația Nr. 78. Dintr'un vas închis plin cu apă până la înălțimea $h = 2{,}24\ m$ (restul de $a = 1\ m$ înălțime conținând aer la presiunea atmosferică p_0), apa se scurge printr'un mic orificiu de fund. Cât trebue să se scoboare planul de apă pentru a se opri scurgerea, admițând că fenomenul evoluează izoterm?

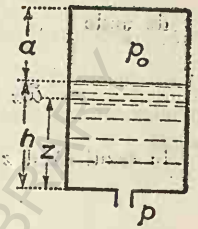


Fig. 206

Răspuns. Fie x depărtarea de fund a nivelului final și p presiunea corespunzătoare din spațiul de aer. Vom avea

$$p_0 a = p\,(a + h - x),$$

iar echilibrul lichidului reclamă:

$$p + \varpi x = p_0,$$

de unde

$$x^2 - \left(a + h + \frac{p_0}{\varpi}\right) x + \frac{p_0}{\varpi} h = 0;$$

cu $\frac{p_0}{\varpi} = 10{,}33$ rezultă:

$$x = 2\ m.$$

Aplicația Nr. 79. Intr'un cilindru orizontal de rază r se găsește lichid până la planul însemnat pe figură, având deasupra închis aer la presiunea atmosferică p_0. Apa se scurge ca în exemplul precedent și oprirea intervine atunci când planul de apă trece prin axa cilindrului. Care este greutatea specifică ϖ a lichidului?

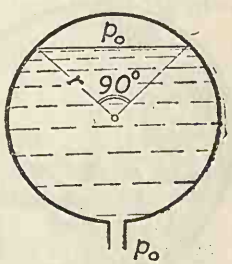


Fig. 207

Răspuns. Legea lui *Mariotte* dă:

$$p\,\frac{\pi r^2}{2} = p_0 r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$$

Pentru echilibru:

$$p + \varpi r = p_0,$$

de unde

$$\varpi = \frac{p_0}{r}\,\frac{\pi + 2}{2\pi}.$$

Aplicația Nr. 80. In ce raport este greutatea specifică ϖ a aerului la altitudinea z, față de ϖ_0 la sol, în cazul unei stratificațiuni adiabatice?

Răspuns. Din ecuația adiabatică

$$\frac{p}{\varpi^\gamma} = B$$

și ceea hidrostatică

$$\varpi\, dz = -\, dp$$

rezultă

$$dz = -\, B\gamma\, \varpi^{\gamma-2}\, d\varpi$$

$$z = -\,\frac{\gamma}{\gamma - 1}\, B \varpi^{\gamma-1} + C$$

sau, dacă pentru $z = 0$ avem ϖ_0,

$$z = \frac{\gamma}{\gamma - 1} B \left(\varpi_0^{\gamma-1} - \varpi_z^{\gamma-1} \right)$$

de unde

$$\varpi_z = \varpi_0 \left[1 - \frac{(\gamma-1) B}{\gamma \varpi_0^{\gamma-1}} z \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \varpi_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma RT_0} z \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

In cazul când z nu este prea mare, putem lua aproximativ

$$\varpi_z = \varpi_0 \left[1 - \frac{z}{\gamma RT_0} \right].$$

Aplicația Nr. 81. Din curba desenată a unei repartiții politropice

$$p v^{\varkappa} = B,$$

în ce mod se poate deduce exponentul $\varkappa$?

Răspuns. Avem

$$\varkappa = \frac{v}{s}$$

unde s este subtangenta corespunzătoare abscisei v.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. XII.

STATICA AEROSTATELOR.

Condițiile de echilibru ale unui aerostat diferă, după cum el navighează *cu volum constant* (*umflat* sau cu pânza întinsă) sau cu *greutate constantă* (*flasc* sau cu pânza sbârcită).

Este de notat că îmbrăcămintea, afară dacă este din metal (*Zeppelin*), nu rezistă în general decât la o suprapresiune interioară foarte mică. De aceea aerostatul e făcut să comunice la partea lui inferioară cu atmosfera prin așa numitul *apendice*.

Imbrăcămintea trebue să fie etanșă și are în general forma sferică. De ea atârnă prin o rețea *nacela*, care servește la primirea oamenilor, aparatelor și balastului (Fig. 208).

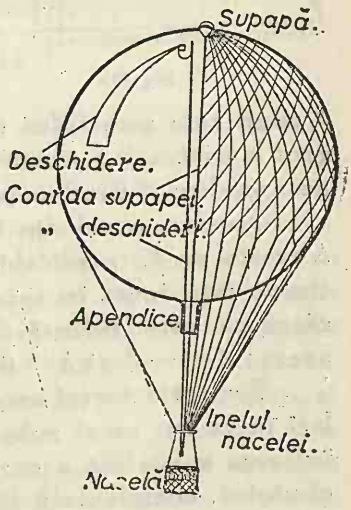


Fig. 208

1. Aerostatul cu volum constant.

Să luăm un aerostat sferic și să-l umplem cu un gaz mai ușor ca aerul, de o densitate relativă δ față de acesta, la aceeași presiune însă temperaturi eventual diferite. Interiorul este în comunicație cu atmosfera prin apendicele format de o mânecă inferioară deschisă.

a) *Forță ascensională.* Numim *forță ascensională* forța rămasă, după ce din subpresiunea aerului (rezultanta presiunilor exercitate de atmosferă pe suprafața exterioară a balonului și care după principiul lui *Arhimede* este egală cu greutatea aerului deslocuit $V\varpi$) scădem greutatea gazului din interior $V\varpi' = V\varpi\delta$ $\left(\text{cu } \delta = \frac{\varpi'}{\varpi} < 1\right)$

conform expresiei:

$$F = V(\varpi - \varpi') = V\varpi(1 - \delta), \qquad (1)$$

V fiind volumul, presupus constant, al aerostatului inclusiv apendicele, ϖ greutatea volumică a aerului și ϖ' aceea a gazului în condițiile actuale de presiune (egală) și temperatură (eventual diferită).

Pentru ca balonul să se ridice trebue ca forța ascensională F să fie mai mare ca restul greutății ce urcă, constând din greutatea proprie (minus gazul de care s'a ținut seamă în F), adică îmbrăcămintea, nacela cu oameni, aparatele și lestul, ce poate varia.

Faptul că balonul se menține umflat se datorește excesului de presiune din interior față de exterior, exces care descrește de sus în jos, anulându-se la gura apendicelui. Diferența Δ a presiunilor la același punct B, B' de o parte și de alta a îmbrăcămintei, adică presiunea din interior minus cea din afară, este (admițând, pentru înălțimi mici, greutatea volumică a gazului constantă pe înălțime, ca la un lichid incompresibil):

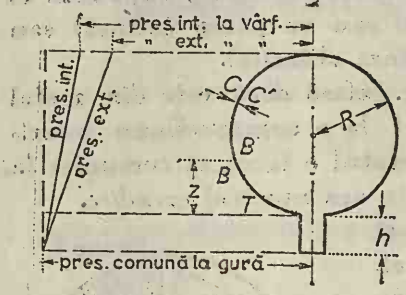


Fig. 209

$$\Delta = \varpi (1-\delta)(h+z) = \Delta_0 + \varpi (1-\delta) z$$

cu

$$\Delta_0 = \varpi (1-\delta) h,$$

z fiind cota punctului considerat față de planul orizontal T, tangent la partea inferioară a balonului, adică la rădăcina apendicelui, pe apendice z fiind negativ.

Așadar, gazul din interior fiind mai ușor ($\delta < 1$), diferența Δ crește cu z, explicabil prin faptul că presiunea scade cu înălțimea mai încet în interior decât în exterior (Fig. 209), astfel că pânza este întinsă din ce în ce mai bine spre vârf. La gură avem: $z = -h$ și $\Delta = 0$.

Expresia forței ascensionale F se mai poate obține după același procedeu ca și subpresiunea lui *Arhimede*, integrând $\Delta\, d\Omega_z$ pe întreaga suprafață a corpului înconjurat de aer, adică pe îmbrăcămintea, complectată fictiv și cu aria ω dela *gura* orificiului. Peretele vertical însă al apendicelui ca și gura lui dau elemente nule, primul având acolo $d\Omega_z = 0$ iar aria gurei $\Delta = 0$. In asemenea condiții integrarea se poate face numai pe îmbrăcăminte, adică pe sfera lipsită de aria ω dela *rădăcina* apendicelui. In acest caz termenul Δ_0, fiind o suprapresiune (interioară) uniformă pe o suprafață *închisă* cu excluderea acestei din urmă arii ω, dă o rezultantă verticală ascensională egală cu $\Delta_0 \omega$, adică partea relativă la volumul apendicelui: $\varpi (1-\delta) h \omega$. Termenul al doilea al lui Δ adică cel variabil, dă o rezultantă egală cu integrala pe sferă:

$$\varpi\,(1-\delta)\int z\,d\Omega_z,$$

care sferă poate cuprinde acum pe lângă îmbrăcăminte şi aria în chestiune ω, deoarece la elementele $z\,d\Omega_z$ de aci $z = 0$. Dar această integrală, fiind luată pe întreaga suprafaţă sferică, reprezintă evident forţa ascensională relativă la balonul propriu zis (fără apedice).

Suma ne redă astfel exact pe $F = \varpi\,(1-\delta)\,V$, unde V cuprinde atât volumul balonului propriu zis cât şi al apendicelui: $h\omega$. Evident că $h\omega$ este neglijabil faţă de V, demonstraţia din urmă având numai un interes teoretic.

Folosind un gaz de o densitate relativă $\delta = 0.5$, factorul $\varpi\,(1-\delta)$ devine în condiţiuni normale de temperatură şi presiune

$$1{,}293.0{,}5 = 0{,}647\ kg/m^3.$$

Un balon sferic relativ mic de $1000\ m^3$ are circa $D = 12{,}4\ m$ şi la creştet $(z = D)$:

$$\Delta_{max} = 8{,}02 + 0{,}647\,h\ kg/m^2,$$

unde h este înălţimea apendicelui în metri.

Pentru $h = 2\ m$ găsim $9{,}31\ kg/m^2$.

Suprapresiunea interioară descreşte astfel dela $9{,}31$, la vârf până la $1{,}293$ la naşterea apendicelui $(z = 0)$.

Rolul apendicelui, cum s'a menţionat la început, este de a lăsa gazul să scape în timpul ascensiunei, pentru ca, pe măsura reducerei presiunei atmosferice (în exterior) cu altitudinea, să se micşoreze şi presiunea interioară, care la gura apendicelui este aceaşi în interior ca şi în exterior. In lipsa apendicelui, adică la balonul ermetic închis, gazul din interior tinde să-şi mărească volumul, cu circa 1% din volumul său la fiecare $100\ m$ înălţare, şi cum îmbrăcămintea nu este rezistentă, s'ar rupe repede. Din ceeace precede se vede că, se dă apendicelui o oarecare lungime, adică se lasă o oarecare suprapresiune interioară chiar la partea delângă rădăcina apendicelui, spre a se umfla mai bine şi partea inferioară a balonului, care altfel s'ar putea deforma, d. e. în cazul unui balon captiv sub acţiunea vântului. Cum suprapesiunea creşte, precum am văzut, dela apendice la creştet, unde este maximă în tot timpul umflărei balonului, cutele încep să dispară de sus în jos.

La unele baloane lungimea apendicelui este de circa patru ori mai mare ca diametrul balonului. Această lungime nu trebue să treacă peste o anumită limită, deoarece Δ_{max} depinde de h.

In fig 209 curbele de repartiția presiunilor pe verticală au fost trasate *drepte*, în ipoteza unei densități constante pe înălțimea balonului, ceeace este admisibil. Intradevăr dacă avem ϖ_1 pentru aer la baza apendicelui și ϖ_2 la vârful balonului, p_1 și p_2 fiind presiunile respective, am avea în cazul unei atmosfere izoterme $\frac{p_1}{\varpi_1} = \frac{p_2}{\varpi_2} = H$, de unde $\varpi_1 - \varpi_2 = \frac{p_1 - p_2}{H}$ și, dacă luăm un ϖ_m mediu pe înălțimea $h + 2R$ și ținem seama că după legea hidrostatică $p_1 - p_2 = \varpi_m (h + 2R)$, vom avea $\frac{\varpi_1 - \varpi_2}{\varpi_m} = \frac{h + 2R}{H}$, unde H este înălțimea atmosferei omogene, egală cu $8\,km$. Dacă înălțimea $h + 2R$ a balonului ar fi d. e. de $20\,m$, am avea $1/4\%$ diferență de densitate ralativă la extremitățile coloanei, astfel că se poate admite o densitate *constantă* egală cu media și deci o repartiție *liniară* a presiunilor.

b) *Variația forței ascensionale cu înălțimea în cazul izoterm cu balonul umflat.*

Să presupunem că îmbrăcămintea balonului suportă fără a se rupe, o tensiune considerabilă, produsă d. e. de o suprapresiune de ordinul unei jumătăți de atmosferă, și că balonul, umflat la minimum cu un gaz de greutate volumică ϖ', ar porni cu apendicele *închis*. Vom admite pentru simplitate că temperatura este aceași pentru aer și gaz, menținându-se constantă în timpul urcării.

Balonul ridicându-se *cu volum și greutate constante*, forța ascensională exprimată prin $(\varpi - \varpi')\,V$ va descrește cu ϖ și balonul va găsi o altitudine de echilibru stabil în straturile superioare ale atmosferei, unde aerul deplasat are aceeași greutate ca a balonului. La $2000\,m$ înălțime d. e. pânza va avea de suportat tensiunile corespunzătoare unei suprapresiuni interioare de circa $20\,cm$ coloană de mercur. Pentru dimensiunile obișnuite ale baloanelor o pânză de asemenea rezistență este greu de realizat; de aci necesitatea apendicelui, spre a se asigura la gura lui egalitatea presiunei din exterior și interior. In asemenea condițiuni ascensiunea se face *sub volum constant dar cu greutate descrescândă*, deoarece, pe măsură ce balonul se urcă, gazul interior se dilată și scapă prin apendice.

Forța F descrește și acum odată cu ϖ, adică cu creșterea altitudinei, după cum arată formula respectivă, însă mai încet, căci simultan cu ϖ descrește și ϖ', densitatea relativă δ din for-

mula scrisă: $F = \varpi (1 - \delta) V$ rămânând neschimbată *). Descreşterea greutăţii specifice ϖ a aerului din atmosferă în funcţie de presiune şi de temperatură se face după ecuaţia fizică:

$$\varpi = \frac{\varpi_0}{1 + \alpha\theta} \frac{p}{p_0}.$$

în care putem înlocui raportul $\frac{p}{p_0}$ în funcţie de z din formula barometrică, presupunând atmosfera cu stratificare *izotermă*:

$$z = 8000\,(1 + \alpha\theta)\,log\,\frac{p_0}{p} = H\,log\,\frac{p_0}{p},$$

H fiind egal cu $8000\,(1+\alpha\theta)$. Vom avea:

$$F = \frac{\varpi_0}{1 + \alpha\theta} \frac{p}{p_0} (1 - \delta)\, V = \frac{\varpi_0}{1 + \alpha\theta} (1 - \delta)\, V e^{-\frac{z}{H}} = F_0 e^{-\frac{z}{H}} = F_z, \quad (1')$$

F_z fiind egal cu F_0 pentru $z = 0$.

---

*) Din relaţiile pe cari ni le dă legea lui *Mariotte* pentru *aer* (fără accent) şi *gazul* interior (cu accent) între două altitudini (ocupate de gura apendicelui) cu presiunile respective p_0 şi p şi anume: $\frac{p_0}{\varpi_0} = \frac{p}{\varpi}$ şi $\frac{p_0}{\varpi_0'} = \frac{p}{\varpi'}$ relaţii valabile atunci când, atât stratificaţia atmosferei cât şi evoluţia gazului interior ar asculta de formula *izotermă*, rezultă, chiar dacă temperaturile constante ar fi diferite la aer şi la gaz: $\delta = \frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{\varpi_0'}{\varpi_0}$, adică menţinerea unui raport δ constant, bine înţeles în mod riguros numai la gura apendicelui. Acest raport între densităţile celor două gaze, dacă este luat atât sub aceeaşi presiune cât şi la aceeaşi temperatură, este egal cu $\frac{R}{R'}$. Dacă temperaturile diferă sau variează, T' a gazului diferind de aceea a aerului T, vom avea pentru valoarea raportului, punând $\delta_0 = \frac{R}{R'}$:

$$\delta = \frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{R}{R'} \frac{T}{T'} = \delta_0 \frac{T}{T'}.$$

In cazul când stratificaţia aerului ar fi politropică cu exponentul $\varkappa$, iar evoluţia gazului interior s'ar face deasemenea politropic şi cu acelaşi exponent plecând dela aceeaşi temperatură T_0 la z_0, vom ajunge evident la aceeaşi temperatură T la z, întrucât (pag. 290) avem pentru ambele gaze

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \frac{T}{T_0}.$$

Dacă însă am avea $\varkappa \neq \varkappa'$, d. e. gazul interior ar evolua adiabatic (cu $\gamma > \varkappa$), vom sosi la $T' > T$, diferite pentru cele două gaze. In toate cazurile vom avea

$$\delta = \frac{\varpi'}{\varpi} = \delta_0 \frac{T}{T'}.$$

Aceasta arată că, *la o ascensiune sub temperatură constantă, forța ascensională descreşte, ca şi* ϖ *cu care este proporțională, în funcție de altitudine după o lege exponențială* (δ rămâne constant).

Balonul se opreşte la o înălțime Z, unde forța F devine egală cu greutatea balonului, exclusiv gazul.

Această înălțime se poate numi *plafonul* balonului umflat, corespunzător greutății avute la plecare: vom numi $G_Z = F_Z$ greutatea menționată. Dela această poziție de echilibru pentru a continua ascensiunea până la $Z' = Z + \Delta Z$, este nevoie a se arunca lest, micşorîndu-se astfel greutatea G_Z a balonului. Deci $G_{Z'} < G_Z$.

c) *Delestaj.* Putem determina creşterea de plafon ΔZ, care corespunde unei diminuări de greutate şi deci a forței ascensionale de echilibru: $\Delta G_Z = \Delta F_Z$ (negative) conform legii exponențiale

$$F_Z = F_0 e^{-\frac{Z}{H}}$$

$$\frac{dG_Z}{dZ} = \frac{dF_Z}{dZ} = \frac{-F_Z}{H} = -V\varpi_0 \frac{1-\delta}{(1+\alpha\theta)^2} \frac{1}{8000} e^{-\frac{Z}{H}}. \qquad (2)$$

Cum valoarea absolută descreşte pe măsură ce Z creşte, rezultă că pentru aceeaşi consumație de lest: $\Delta f = -\Delta F_Z$ saltul de plafon ΔZ creşte cu cota Z a poziției de unde se aruncă lestul.

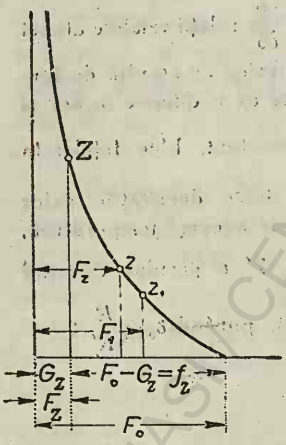


Fig. 210

Să calculăm lestul inițial f_Z, care la plecare dela cota O, unde presupunem echilibru, trebue aruncat din greutatea totală $G_Z + f_Z$ pentru ca balonul să se urce la cota Z (G_Z cuprinde greutatea proprie a îmbrăcămintei şi nacelei cu restul lestului conservat până la cota de echilibru Z). Eventual f_Z la plecare poate fi înlocuit prin tracțiunea cablului de fixare (Fig. 210).

Presupunem pentru simplitate $\theta = 0$. Formula (1'), aplicată la plecare şi la cota plafonului, dă respectiv:

$$G_Z + f_Z = F_0 \quad \text{şi} \quad G_Z = F_Z = F_0 e^{-\frac{Z}{H}},$$

iar dacă Z este destul de mic față de H, aproximativ:

$$G_Z = F_0 \left(1 - \frac{Z}{H}\right);$$

rezultă valorile corespunzătoare: exact

$$f_Z = F_0 \left(1 - e^{-\frac{Z}{H}}\right)$$

și aproximativ:

$$f_Z = F_0 \frac{Z}{H} = F_0 \frac{Z}{8000} = \frac{Z}{8000 - Z} G_Z .$$

Ultima formulă este suficientă, având în vedere aproximația formulei barometrice.

d) *Viteza de ascensiune.* Aceasta depinde de rezistența aerului, care este de forma Φu^2, unde u este viteza de urcare. Cum această rezistență crește foarte rapid, se poate considera că, în orice moment, când aerostatul ocupă o altitudine $z < Z$, există egalitate, deci echilibru între rezistență și forța $F_z - G_Z$, care, acționând balonul, provoacă această rezistență. Forța în chestiune se numește *ruptură de echilibru*:

$$\mathcal{R}_z = F_z - G_Z = \Phi u^2.$$

Cum $F_z = F_0 e^{-\frac{z}{H}}$, iar pentru altitudini moderate

$$F_z = F_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right),$$

după cum de asemenea

$$G_Z = F_0 \left(1 - \frac{Z}{H}\right),$$

vom putea scrie:

$$\mathcal{R}_z = \Phi u^2 = F_0 \frac{Z - z}{H} . \qquad (3)$$

La origină ($z = 0$) vom avea pentru ruptura de echilibru $\mathcal{R}_0$, evident egală cu f_Z definit mai sus:

$$\mathcal{R}_0 = F_0 - G_Z = F_0 \frac{Z}{H} = \Phi u_0^2, \qquad (4)$$

u_0 fiind viteza căpătată de balon la pornire, în timpul foarte scurt, în care, după eliminarea lestului f_Z, rezistența crescândă a aerului (proporțional cu u^2) a atins valoarea *rupturei de echilibru* inițială $F_0 - G_Z$. Viteza u_0 este deci considerată ca viteză inițială a mișcării întârziate ce urmează. Raportul $\frac{u}{u_0}$ rezultă din (3) și (4), fiind egal cu $\sqrt{1 - \frac{z}{Z}}$.

Pentru $z = Z$ balonul intrând în repaus avem:

$$\mathcal{R}_Z = F_Z - G_Z = \Phi u_Z = 0.$$

Derivând ecuația (3) și ținând seama că $\frac{dz}{dt}=u$ obținem

$$\frac{du}{dt}=-\frac{F_0}{2\Phi H}.$$

Mișcarea este uniform întârziată, ca și a unui proectil lansat vertical în vid cu o vitesă inițială u_0. Timpul pentru a atinge o altitudine intermediară z, la care corespunde vitesa u, se obține împărțind variația $u-u_0$ a vitesei prin accelerația $-\frac{F_0}{2\Phi H}$:

$$t=(u_0-u)\,\frac{2\Phi H}{F_0}=u_0\left(1-\frac{u_0}{u}\right)\frac{2\Phi H}{F_0}.$$

Introducând valoarea raportului $\frac{u}{u_0}$ și eliminând pe u_0 și H prin (4), expresia devine:

$$t=2Z\sqrt{\frac{\Phi}{F_0-G_0}}\left(1-\sqrt{1-\frac{z}{Z}}\right),$$

iar pentru $z=Z$:

$$T=2Z\sqrt{\frac{\Phi}{F_0-G_0}}.$$

Se poate obține t și prin o dublă integrare a ecuației

$$-\frac{du}{dt}=\frac{F_0}{2\Phi H}.$$

Avem mai întâiu

$$u_0-u=\frac{F_0}{2\Phi H}\,t=u_0-\frac{dz}{dt},$$

căci la $t=0$ avem $u=u_0$ și apoi

$$\frac{F_0}{4\Phi H}\,t^2-u_0t+Z=0,$$

fiindcă la $t=0$, $z=0$.

Rezultă singura soluție admisibilă

$$t=\frac{u_0-\sqrt{u_0^2-\frac{F_0z}{\Phi H}}}{\frac{F_0}{2\Phi H}},$$

întrucât a doua soluție cu semnul $+$ nu dă $z=0$ pentru $t=0$. Împărțim numărătorul și numitorul cu u_0 și, folosind

ecuația (4) se elimină simultan H și u_0. Se admite în general $\Phi = 0{,}0225\, D^2$, unde D este diametrul balonului.

e) *Expresia forței ascensionale când* $\theta \neq \theta'$ *adică* $T \neq T'$. Dacă în expresia forței ascensionale $F = V(\varpi - \varpi')$ introducem

$$\varpi = \frac{p}{RT} \quad \text{și} \quad \varpi' = \frac{p}{R'T'}$$

cu $T \neq T'$, ea va lua forma:

$$F = pV\left(\frac{1}{RT} - \frac{1}{R'T'}\right).$$

In locul constantelor gazelor putem introduce densitatea relativă, care la aceeași presiune și temperatură este

$$\delta_0 = \frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{R}{R'},$$

iar în caz de temperaturi diferite

$$\delta = \frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{R}{R'}\frac{T}{T'} = \delta_0 \frac{T}{T'}.$$

Expresia generală a forței ascensionale la o altitudine z, unde greutatea volumică a aerului este ϖ, temperatura aerului T, ar aceea a gazului T', este:

$$F_z = \frac{pV}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{\delta_0}{T'}\right) = \varpi V\left(1 - \delta_0 \frac{T}{T'}\right).$$

f) *Stabilitatea balonului umflat într'o atmosferă cu stratificare izotropică, gazul din interior evoluând adiabatic.* Vom presupune că nu intervine nici o schimbare de temperatură prin radiație, și că variația cu înălțimea a temperaturei aerului este datorită numai stratificării izotropice a atmosferei, variația temperaturei gazului din interior fiind datorită numai dilatației adiabatice în timpul urcării balonului (ambele deci funcțiuni de z).

Pentru a studia în asemenea împrejurări variația forței ascensionale cu înălțimea, variație care constitue un criteriu al stabilității în preajma plafonului, derivăm pe F_z în raport cu z:

$$\frac{dF_z}{dz} = V\frac{d(\varpi - \varpi')}{dz} = V\frac{d(\varpi - \varpi')}{dp}\frac{dp}{dz}$$

și cum după legea hidrostatică

$$\frac{dp}{dz} = -\varpi,$$

vom avea

$$-\frac{dF_z}{dz} = V\varpi \frac{d(\varpi - \varpi')}{dp}.$$

Stratificația izotropică fiind exprimată prin $\frac{p}{\varpi^{\varkappa}} = const$, această relație după transformarea logaritmică și derivare dă:

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{dp}{\varkappa p} \quad \text{sau} \quad \frac{d\varpi}{dp} = \frac{\varpi}{\varkappa p}.$$

Tot astfel pentru gazul interior, presupunând că el evoluează adiabatic $\varkappa' = \gamma'$, vom avea:

$$\frac{d\varpi'}{dp} = \frac{\varpi'}{\gamma' p}.$$

Rezultă

$$-\frac{dF_z}{dz} = \frac{V\varpi}{p}\left(\frac{\varpi}{\varkappa} - \frac{\varpi'}{\gamma'}\right).$$

Dacă luăm cu aproximație $\varkappa = \gamma' = n$, avem:

$$-\frac{dF_z}{dz} = \frac{V\varpi}{pn}(\varpi - \varpi') = \frac{F_z}{nH},$$

unde H este înălțimea atmosferei omogene. La plafon, unde $F_Z = G_Z$, un delestaj $-\Delta G_Z$ va provoca o creștere pozitivă a rupturei de echilibru, egală cu $-\Delta F_Z = -\Delta G_Z$, urmată de o urcare ΔZ; aceste variațiuni la plafon sunt evident legate între ele prin aceeași relație ca și la altitudinea curentă, deoarece curba $F_z = f(z)$ este identică cu $F_Z = f(Z)$.

Așadar, cu aproximația unei diferențe mici de ordin superior vom avea:

$$\Delta Z = -\Delta G_Z \frac{nH}{V(\varpi - \varpi')} = -\Delta G_Z \frac{nH}{G_Z} \text{ (formula delestajului).}$$

Astfel, dacă $G_Z = 1000\,kg$ și se aruncă un lest de $10\,kg$ adică $\frac{-\Delta G_Z}{G_Z} = 1\%$, iar $\theta^0 = 0^0 C$ și $n = 1{,}40$, balonul fiind umplut cu hidrogen, vom avea:

$$\Delta Z = \frac{1{,}35.8000.10}{1000} = 108\,m.$$

Cum înălțimea aceasta pentru o delestare importantă este relativ mică, rezultă că balonul umflat are o mare stabilitate.

g) *Influența variațiilor de temperatură datorite radiațiunei* Ruptura de echilibru are ca expresie la cota curentă z:

$$F_z - G_Z = \mathcal{R}_z = V\frac{p}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{\delta_0}{T'}\right) - G_Z$$

și, derivând parțial în raport cu T' sub p constant, găsim

$$\frac{\partial F_z}{\partial T'} = V\frac{p}{R}\frac{\delta_0}{T'^2} = V\frac{\varpi'}{T'}.$$

Cum

$$V\varpi' = \frac{V(\varpi - \varpi')}{\varpi - \varpi'}\varpi' = \frac{F_z\frac{\varpi'}{\varpi}}{1 - \frac{\varpi'}{\varpi}} = \frac{F_z\delta_0\frac{T}{T'}}{1 - \delta_0\frac{T}{T'}},$$

vom putea scrie:

$$\frac{\partial F_z}{\partial T'} = \frac{F_z}{T'}\frac{\delta\frac{T}{T'}}{1 - \delta_0\frac{T}{T'}}.$$

Derivând parțial în raport cu T, găsim analog

$$\frac{\partial F_z}{\partial T} = -\frac{F_z}{T}\frac{1}{1 - \delta_0\frac{T}{T'}}.$$

Pentru variații mici de temperatură $\Delta T'$ și ΔT vom avea:

$$\Delta F_z = \frac{\partial F_z}{\partial T'}\Delta T' + \frac{\partial F_z}{\partial T}\Delta T \quad \text{sau} \quad \frac{\Delta F_z}{F_z} = \frac{\delta_0\frac{\Delta T'}{T'}\frac{T}{T'} - \frac{\Delta T}{T}}{1 - \delta_0\frac{T}{T'}}.$$

Dacă admitem $T = T'$ găsim formula simplă

$$\frac{\Delta F_z}{F_z} = \frac{\delta_0\Delta T' - \Delta T}{T(1 - \delta_0)},$$

iar la plafon, folosind formula delestajului

$$\Delta Z = -\Delta G_Z\frac{nH}{G_Z} \quad \text{cu } \Delta G_Z = \Delta F_Z \quad F_Z = G_Z,$$

$$\Delta Z = nH\left(\frac{\delta_0}{1 - \delta_0}\frac{\Delta T'}{T} - \frac{1}{1 - \delta_0}\frac{\Delta T}{T}\right).$$

Primul termen cu $\frac{\delta_0}{1 - \delta_0}$ poate varia mult cu δ_0 adică dela un gaz

la altul. Astfel, pentru gazul de iluminat avem

$$\frac{\delta_0}{1-\delta_0} = \frac{0{,}42}{0{,}58} = 0{,}73,$$

pe când pentru hidrogen

$$\frac{0{,}07}{0{,}93} = 0{,}075,$$

adică de zece ori mai puțin.

Dacă calculăm variația plafonului la o diferență de temperatură $\Delta T' = 1^0$ cu $T = 290^0$, deci $\theta = 17^0\,C$, $H = 8000\,m$ și $\varkappa = \gamma' = n = 1{,}35$ (gaz de iluminat), găsim $\Delta Z = 27\,m$, pe când pentru hidrogen găsim $\Delta Z \cong 3\,m$.

Rezultă că, din punct de vedere al variațiilor de temperatură, balonul cu hidrogen este sensibil mai stabil decât acel cu gaz aerian, explicabil prin mica greutate specifică a hidrogenului, care face ca aceeași creștere de temperatură să provoace ieșirea unei greutăți de gaz cu mult mai mici. Intradevăr, după ecuația $p = \varpi RT$ avem sub p constant

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = -\frac{dT}{T},$$

ceeace arată că se expulzează aceeași proporție de gaz, deci în cazul hidrogenului pierderea este minimă.

2. Aerostat cu greutate constantă (flasc sau sbârcit).

a) *In ipoteza unei stratificări a aerului și a unei evoluții a gazului, izoterme.*

Să presupunem că la cota $z = 0$ balonul nu se află complet umflat, volumul fiind deci $v_0 < V$ adică mai mic ca al balonului umflat. Forța ascensională F_1 corespunzătoare volumului de gaz v_0, măsurat la presiunea de jos p_0 la care greutatea specifică a aerului este ϖ_0, va fi:

$$F_1 = v_0(\varpi_0 - \varpi_0) = v_0\varpi_0\left(1-\delta_0\frac{T_0'}{T_0}\right),$$

deci evident mai mică de cât aceea a balonului umflat

$$F_0 = V\varpi_0\left(1-\delta_0\frac{T_0'}{T_0}\right),$$

în cazul $T_0' = T_0$ fiind:

$$F_1 = v_0\varpi_0(1-\delta_0),$$

Dacă totuşi avem $F_1 > G_Z$ a balonului, acesta lăsat liber se va înălţa şi atunci, în virtutea rupturei de echilibru mai mici dar pozitive $F_1 - G_Z > 0$.

Ascensiunea se va efectua un timp oarecare *cu masă sau greutate constantă*, deoarece până la completa umflare a balonului nu va scăpa gaz prin apendice.

Intradevăr, cât timp i se oferă gazului din interior posibilitatea de a ocupa volumul crescând ce îi impune scăderea cu înălţimea a presiunei din afară, ori care ar fi de altfel legea de expansiune a gazului, nu e nici un motiv ca acesta să scape şi vom avea $v\varpi' = const.$

Pentru ca şi forţa ascensională F_1 să rămână în acest timp constantă, trebue ca $v\varpi$ să fie constant, căci s'a presupus $\frac{T'}{T} = const.$ Condiţia este satisfăcută în cazul izoterm $T = const.$ şi $T' = const.$ căci atunci din $v\varpi' = const$ rezultă şi $v\varpi = const$, $\delta = \frac{\varpi'}{\varpi}$ rămânând constant. In caz când gazul şi aerul sunt la pornire la aceeaşi temperatură, $T' = T$ menţinându-se şi în timpul urcării, vom avea

$$F_1 = (\varpi - \varpi') = v\varpi\,(1-\delta)$$

cu $v\varpi = const$, deci forţa ascensională şi ruptura de echilibru se vor menţine constante până la completa umflare a balonului. Vitesa balonului, dată de relaţia

$$F_1 - G_Z = \Phi u_0^2,$$

va rămâne şi ea constantă în tot timpul ascensiunii, săvârşită în asemenea condiţii, adică cu greutate constantă.

Odată balonul complet *umflat* — cu pânza întinsă —, atingând în acel moment o anumită altitudine z_1, ascensiunea va continua cu volum constant ca şi în punctul 1, descris mai sus, adică cu scapare de gaz prin apendice şi cu vitesă descrescândă dela u_0 la 0, ne mai fiind nici o deosibire între cele două cazuri. F_z în aceasta a doua fază va varia dela F_1 până la $F_Z = G_Z$ a plafonului, când balonul va intra în echilibru (vezi fig 210).

Inălţimea z_1, la care balonul s'a umflat complet, este atinsă evident în cazul prezent *mai încet* decât cu balonul umflat (punctul 1), pornit cu acelaşi G_Z dar cu o ruptură de echilibru mai mare $F_0 - G_Z$, care, descrescând continuu, abia la z_1 atinge ruptura constantă (între $z = 0$ şi z_1) $F_1 - G_Z$ a balonului sbârcit

Ajungem la aceeaşi concluzie prin considerarea vitesei, care la punctul 1 este mai mare la pornire, atingând abea la z_1 valoarea mai redusă u_0 din cazul balonului sbârcit, care şi-o conservă constantă dela $z = 0$ până la cota z_1.

Avantajul balonului, pornit umflat, de a se înălţa mai repede se obţine evident cu folosirea de mai mult gaz la plecare de cât la balonul flasc, surplusul scăpând treptat pe drum prin apendice, până la înălţimea z_1, unde avem aceeaşi cantitate de gaz în ambele cazuri, precum şi aceeaşi vitesă de ascensiune

$$\sqrt{\frac{F_1 - G_Z}{\Phi}}.$$

La pornirea cu balonul umflat, ruptura de echilibru disponibilă, fiind mai mare pentru aceeaşi greutate, permite a se lua o cantitate mai mare de lest, ceea ce conduce bine înţeles la micşorarea rupturei de echilibru şi deci la întârzierea urcărei. Pornirea cere ca greutatea totală cu lestul astfel sporit să fie ceva mai mică ca F_1, cazul limită de egalitate cu F_1 corespunzând unei rupturi de echilibru şi unei vitese de plecare nule. In fine, atingerea cotei z_1 cu aceeaşi vitesă presupune că surplusul de lest se descarcă pe drum, având la cota z_1 nu numai $F = F_1$ dar şi acelaşi G_Z ca la pornirea cu balonul umflat, deci aceeaşi ruptură de echilibru.

Rezultă că luarea unui lest mai mare la plecare permite, la anumite valori date F_1 şi G_Z, a se regula modul cum se atinge înălţimea z_1.

Este de notat că pornirea trebue totdeauna făcută cu o viteză verticală destul de mare, pentru a degaja balonul deasupra caselor şi arborilor.

b) *Stabilitatea balonului flasc într'o atmosferă cu stratificaţie izotropică, gazul inferior evoluând adiabatic.*

In asemenea condiţii forţa ascensională nefiind riguros constantă în prima fază a ascensiunei, ca în cazul precedent, vom întrebuinţa notaţia F în loc de F_1.

Avem în acest caz:

$$F = v(\varpi - \varpi') = v\varpi'\left(\frac{\varpi}{\varpi'} - 1\right) = G'\left(\frac{\varpi}{\varpi'} - 1\right)$$

cu $v < V$ şi cu $v\varpi' = G' = const.$

Rezultă

$$\frac{dF}{dz} = G'\frac{d\frac{\varpi}{\varpi'}}{dp}\frac{dp}{dz} = -G'\varpi\left(\frac{1}{\varpi'}\frac{d\varpi}{dp} - \frac{\varpi}{\varpi'^2}\frac{d\varpi}{dp}\right) = -\frac{G'\varpi^2}{\varpi' p}\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\gamma'}\right)$$

și înlocuind $\frac{p}{\varpi} = H$:

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{\varpi v}{H}\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\gamma'}\right).$$

In caz de echilibru la o cotă z, fără a face ipoteza existenței unui plafon fix cu $z = Z$, numind G greutatea proprie fără gazul interior, avem

$$G = v(\varpi - \varpi')$$

și înlocuind în relația de mai sus pe v scos de aci, ea devine:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{-G\varpi}{H(\varpi - \varpi')}\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\gamma'}\right).$$

Cum pe de altă parte

$$\frac{\varpi}{\varpi - \varpi'} = \frac{1}{1 - \delta_0 \frac{T}{T'}},$$

avem în cele din urmă

$$-\frac{dF}{dz} = \frac{G}{H\left(1 - \delta_0 \frac{T}{T'}\right)}\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\gamma'}\right).$$

Se vede că pentru $\varkappa = \gamma'$ avem $\frac{dF}{dz} = 0$, echilibru indiferent' care poate deci exista la orice cotă, unde balonul s'ar găsi incomplet umflat (flasc) sau umflat la limită.

Fie că pornirea s'a făcut cu $T_0 = T_0'$ fie cu $T_0 \neq T_0'$, din cauza egalității gradientului, raportul $\frac{T}{T'}$ se va menține și vom avea $\frac{\varpi'}{\varpi} = \delta = \delta_0 \frac{T}{T'} = const.$

Pentru $\varkappa = 1{,}40$ (stratificație adiabatică) și $\gamma' = 1{,}35$ (gaz de iluminat) și în general pentru $\varkappa > \gamma'$ avem $\frac{dF}{dz} > 0$, ceeace înseamnă că la urcare F crescând, echilibrul este instabil și balonul se va urca, atingând completa umflare, după care va evolua sub *volum constant*. Numai pentru $\varkappa < \gamma'$ (d. e. hidrogen) avem echilibru stabil și deci un plafon pentru balonul flasc.

c) *Influența variațiilor de temperatură prin radiațiune la balonul flasc.*

Avem:

$$F = G'\left(\frac{\varpi}{\varpi'} - 1\right) = G'\left(\frac{T'}{\delta_0 T} - 1\right).$$

Derivând în raport cu T' avem $\frac{dF}{dT'} = \frac{G'}{\delta_0 T}$ și cum

$$G' = \varpi v' = \frac{v(\varpi - \varpi')}{\varpi - \varpi'} \varpi' = \frac{F}{\frac{\varpi}{\varpi'} - 1} = \frac{F\frac{\varpi}{\varpi'}}{1 - \frac{\varpi'}{\varpi}} = \frac{F\delta_0 \frac{T'}{T}}{1 - \delta_0 \frac{T}{T'}},$$

obținem

$$\frac{dF}{dT'} = \frac{F}{\left(1 - \delta_0 \frac{T}{T'}\right) T'}.$$

Tot astfel

$$\frac{dF}{dT} = -\frac{G'T'}{\delta_0 T^2} = -v\varpi' \frac{\varpi}{\varpi' T} = -\frac{v\varpi}{T} = \frac{-v(\varpi - \varpi')\varpi}{\varpi\left(1 - \delta_0 \frac{T}{T'}\right) T}$$

$$= -\frac{F}{\left(1 - \delta_0 \frac{T}{T'}\right) T}.$$

Pentru variațiunile finite ΔT și $\Delta T'$ obținem, ca în cazul balonului umflat:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\frac{\Delta T'}{T'} - \frac{\Delta T}{T}}{1 - \delta_0 \frac{T}{T'}}.$$

Combinând cu expresia de mai sus a derivatei $\frac{dF}{dz}$ la echilibru, unde $G = F$, găsim:

$$\Delta z = H \frac{\frac{\Delta T'}{T'} - \frac{\Delta T}{T}}{\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\gamma'}}.$$

Aceasta dă variațiile de altitudine provocate de anumite variații de temperatură, datorite radiațiunii sau *aspirației* (vezi mai departe) și se vede că ele sunt independente de δ_0.

Să luăm ca exemplu cazul când temperatura gazului de iluminat se urcă cu $1^0 C$, pe când $T = 290^0$ ar rămâne constant; deci

$$\Delta T' = 1^0 C\ ,\quad \gamma' = 1{,}35\ ,\quad \Delta T = 0$$

$$T' = T = 290^0\ ,\quad \text{corespunzând cu } H = 8000\,m.$$

Dacă dăm lui $\varkappa$ diferite valori, corespunzând la diferite stratificații, rezultă pentru Δz următoarele valori:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\gamma' = 1{,}35$	$\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\gamma'}$	Δz în m
$\varkappa = 1{,}35$	0	∞
$\varkappa = 1{,}20$	0,092	307
$\varkappa = 1{,}00$	0,257	108

Cauzele variaţiilor de temperatură sunt pe de o parte încălzirea prin razele solare ziua şi răcirea balonului noaptea, iar pe de altă parte răcirea prin *aspiraţie* la mişcări verticale *) (de circa $1 \div 4\ m/sec$), pierderea de căldură fiind proporţională cu vitesa.

Cum balonul ziua este supraîncălzit, răcirea datorită radiaţiei, conform celor ce preced, micşorează urcarea şi din contra măreşte coborîrea. De aceea balonul flasc încălzit de soare se urcă încet şi uniform, şi cade accelerat.

Noaptea lucrurile se petrec invers; balonul, fiind mai rece decât aerul, se urcă repede şi se coboară încet.

Pentru călătorii de durată este bine ca ziua balonul să rămână la plafon iar noaptea să se plaseze într'un strat de stabilitate (cu inversiune).

3. Navigaţia aerostatului.

a) *Coborîre.* Coborîrea se face totdeauna cu balonul sbârcit (flasc). Imperfecţiunea balonului, din punct de vedere al echilibrului, constă nu numai în imposibilitatea de a se realiza o suprapresiune interioară, superioară câtorva *cm* coloană de apă, din cauza pericolului de a se rupe îmbrăcămintea, dar şi în imposibilitatea de a-şi conserva, fără alte mijloace, forma, atunci când, cum e cazul la coborîre, presiunea exterioară devine mai mare.

S'a căutat a se înlătura aceste inconveniente prin o carcasă rigidă, construindu-se *zeppelinuri*.

Balonul cu apendice nu poate fi cu volum constant decât când urcă, dar atunci pierde gaz prin apendice. Fie că se ridică cu volum constant şi greutate variabilă (punctul 1), fie că se ridică cu masă constantă şi volum variabil (punctul 2), la coborîre balonul nu poate fi decât cu masă constantă şi sbârcit, până neavând rigiditate pentru a rezista presiunei exterioare crescânde, care strânge balonul. Imbrăcămintea începe evident să se sbârcească dela partea de jos. In timpul coborîrii balonul trece prin straturi cu densităţi crescânde, dar cum raportul $\frac{\varpi'}{\varpi}$ rămâne cum am

*) Mişcările orizontale faţă de aerul înconjurător sunt, la balonul foarte rare.

văzut constant în cazul când $\varkappa \cong \gamma'$ (deci și în cazul izoterm $\varkappa = \varkappa' = 1$) iar $v\varpi'$ este în orice caz constant, antrenând prin constanța raportului δ și pe aceea a lui $v\varpi$, rezultă că în realitate forța ascensională rămâne, cu destulă aproximație, constantă. Cum coborîrea se face cu greutate constantă și cu forță ascensională constantă, dacă la un moment dat (d. e. la cota de plafon Z) forța ascensională este egală cu greutatea balonului, va exista echilibru indiferent pentru balon în toate straturile inferioare ale atmosferei până la pământ, ceea ce s'a constatat și mai sus prin calcul. In consecință, dacă la aceea înălțime Z se va produce un exces de greutate, d. e. prin sarcina accidentală a unei ploi sau prin eliminarea voită a unei cantități de gaz prin supapă, acest exces va persista constant în toată coborîrea balonului până la sol.

In definitiv, în condițiunile arătate mai sus pentru balonul sbârcit, greutății G_Z a părții solide (care, la ascensiunea balonului umflat sub volumul constant V, se poate ridica până la $z = Z$) îi corespunde un volum inițial $v \leqslant V$ (măsurat la presiunea p_0 dela $z = 0$). Acest volum v_0, care înmulțit cu ϖ_0 (la p_0) ne dă greutatea gazului la plecare, comportă un minim, deci o cantitate minimă de gaz, cu care se poate încă atinge altitudinea de echilibru dată Z (ruptura de echilibru corespunzătoare fiind atunci nulă, iar durata ascensiunei, teoretic, infinită).

Acest volum minim satisface, așa dar, relația $v_0\varpi_0(1-\delta) = G_Z$. Dacă v_0 la $z = 0$ întrece acest minim, ruptura va fi pozitivă și umflarea completă se va face la $z_1 < Z$, iar din acel moment cu balonul umflat va începe scăparea naturală de gaz, atingându-se în urma plafonul Z.

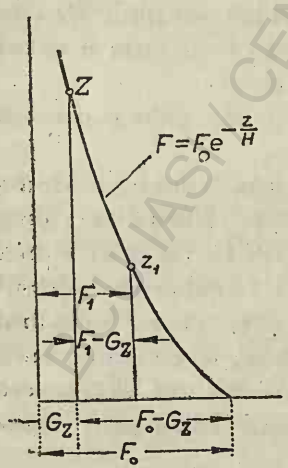


Fig. 211

Dacă v_0 va fi mai mic de cât acel minim, ruptură de echilibru la $z = 0$ va fi negativă, astfel că greutatea G_Z nu se va putea ridica depe sol. Se vede din formulă că v_0 minim se poate reduce numai dacă simultan se micșorează și greutatea de plecare G_Z, consimțindu-se astfel la un plafon mai înalt.

In cădere dela plafon, există teoretic echilibru indiferent la toate cotele inferioare, ori care ar fi greutatea balonului, care este evident cu atât mai mică, cu cât plafonul a fost mai ridicat.

Cum, odată balonul în aer, nu i se poate decât micşora greutatea prin aruncare de lest, plafonul *Z*, unde îşi poate găsi echilibrul stabil (sau limita superioară a echilibrului indiferent), nu poate decât să crească.

b) *Navigaţie cu baloneţ.* Numai folosirea *baloneţului* (cavitate inferioară în formă de tor, care se umple cu aer printr'un ventil) permite o coborîre limitată, după o lungă călătorie, în timpul căreia s'a aruncat mereu din lest şi balonul este deci nevoit să navige în regiunile superioare ale atmosferei pentru a avea stabilitate. Cu acest mijloc se poate trece în regiunile inferioare cu posibilitate de oprire, obţinându-se din nou stabilitatea (Fig. 212).

Prin baloneţ se transformă de fapt balonul sbârcit în balon umflat de un volum mai mic, navigaţia făcându-se deci cu *volum maxim variabil*; acest volum sau capacitatea limită la umflare poate varia între *V* (volumul balonului plin cu baloneţul gol) şi *V—V'*, unde *V'* este volumul baloneţului.

Umplând baloneţul, transformăm balonul sbârcit într'un balon mai mic complet plin, având îmbrăcămintea întinsă, ca la începutul unei ascensiuni, care se poate efectua din nou până la orice înălţime de echilibru stabil prin o aruncare potrivită de lest.

Să presupunem că, fiind la altitudinea de plafon *Z*, voim a naviga la o altitudine inferioară. Coborîrea poate începe fie prin o *suprasarcină* accidentală, ploaie sau zăpadă, fie voit, deschizând supapa de scăpare a gazului, pentru a provoca un exces de greutate asupra forţei ascensionale, adică o suprasarcină fictivă.

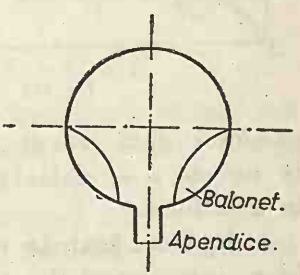


Fig. 212

Coborîrea se poate modera prin aruncare de lest. In acest timp, după cum s'a explicat mai sus, balonul prin comprimarea gazului tinde să devină sbârcit, însă prin umplerea treptată a baloneţului putem menţine îmbrăcămintea întinsă. Ajunşi la cota voită, oprim brusc coborîrea prin aruncare de lest (echivalent în total cu suprasarcina menţionată şi un mic surplus), întinzând complet balonul prin umflarea baloneţului.

Este evident că umplerea baloneţului, care mută aer din exterior în interior, nu modifică ruptura de echilibru. Diferenţa, ca efect, constă numai în faptul că, după aruncarea de lest menţionată, balonul nu se va mai putea urca la înălţimea iniţială, deoarece în timpul nouei urcări pânza fiind deja întinsă, se va

pierde o nouă cantitate de gaz prin apendice, şi balonul se va opri repede, pe când dacă balonul ar fi fost lăsat sbârcit, prin acea aruncare de lest s'ar fi umflat şi ar fi depăşit chiar cota Z corespunzătoare greutăţii de plecare G_Z, acum micşorate.

Cum fiecare din aceste operaţii implică o pierdere de gaz şi o pierdere corespunzătoare de lest, după un timp oarecare consumându-se întregul lest, coborîrea devine inevitabilă cu balonul sbârcit şi baloneţul umflat. De aceea în general nu s'au putut realiza ascensiuni mai lungi de cât de 48 ore.

Astăzi baloneţul serveă numai pentru menţinerea în stare plină a baloanelor lungueţe, ceeace este necesar pentru stabilitatea longitudinală.

Navigaţia fără baloneţ. La o navigare fără baloneţ pentru $z=f(t)$ obţinem o curbă. Părţile trase gros pe fig. 213 indică parcursul cu balonul umflat, pe când cele subţiri, parcursul cu balonul flasc. Este de notat că, la urcarea ce urmează după o delestare, d. e. în A, balonul în virtutea inerţiei întrece puţin planul lui de echilibru şi în virtutea rupturei negative rezultate s'ar coborî apoi până la pământ, dacă aerul n'ar fi suficient de stabil; de aceea poate fi nevoie a se delesta puţin (circa $1/2\ kg$) spre a aduce balonul în echilibru.

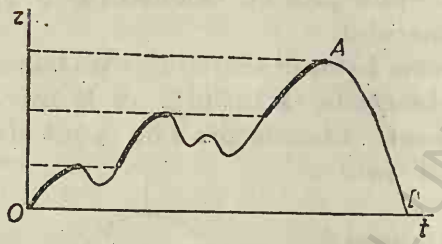


Fig. 213

In fine, înainte de aterisare trebue delestat pentru frânare (d. e. sub formă de *guiderope*, vezi mai jos), cu scopul de a preveni isbirea de pământ.

Balonul în mişcarea lui antrenează şi aer, ceeace poate mări aparent masa lui cu circa 50%.

c) *Sarcini accidentale.* Dacă balonul se găseşte în echilibru la o înălţime Z, sau în echilibru indiferent la o altitudine mai mică, şi capătă o suprasarcină σ — ploaie ori zăpadă —, echilibrul se rupe şi balonul coboară până la pământ. Pentru a opri coborîrea, este nevoie a se arunca lest. Dacă lestul aruncat $f=\sigma$, echilibrul redevine indiferent între sol şi cota Z, şi de aceea în practică se aruncă ceva mai mult, pentru ca balonul să se ridice până la o poziţie de echilibru stabil la o cotă Z', evident mai mare ca Z. Balonul se va găsi din nou plin, dar cu o cantitate mai mică de gaz, la cota mai ridicată Z', corespunzătoare delestajului $f-\sigma=G_Z-G_Z'$.

Din cauza variaţiunilor atmosferice, cari provoacă coborîrea, planul de echilibru (plafonul) se ridică incontinuu, simultan cu delestajul balonului.

Dacă între timp ploaia sau zăpada dispare, va fi nevoie a se elimina gaz pentru ca balonul să nu se ridice prea sus. Suprasarcina de ploaie sau rouă la un balon de $1000\,m^3$ este de circa $80\,kg$, fiind mai mare în cazul zăpezii.

O ruptură de echilibru poate proveni şi din trecerea printr'un nor.

Se vede că după aruncarea întregului lest nu mai există posibilitate de ascensiune.

4. Balon captiv şi guiderope. Aplicaţie la submarine.

Balonul *captiv* este în echilibru sub acţiunea greutăţei proprii G, a forţei ascensionale F, a forţei exercitate orizontal de vânt Φv^2, unde v este vitesa vântului, a greutăţii P a cablului şi a tracţiunei T a cablului la troliu, unde înclinarea cablului faţă de orizontală este α.

Vom avea în proecţie, respectiv, pe o axă orizontală şi alta verticală:

$$T\cos\alpha = \Phi v^2 \qquad T\sin\alpha = F - G - P.$$

Să presupunem acum că balonul se mişcă cu o vitesă orizontală u în direcţia vântului, târând un cablu liber care devine un *guiderope* (cablu de ghidare).

Funia se freacă de sol, valoarea frecării fiind Φu^2.

Fie P greutatea funiei până la punctul de contact cu solul. Vom avea, comparativ cu cazul de mai sus, T fiind tracţiunea orizontală provocată de frecarea cu pământul:

$$\alpha = 0 \qquad T = \Phi u^2 = \Phi (v - u)^2 \qquad F - G - P = 0.$$

In ambele cazuri presupunem balonul sbârcit, adică forţa ascensională F constantă.

Intradevăr, în primul caz putem considera că balonul captiv se găseşte în a doua ascensiune.

In al doilea caz trebue avut în vedere că funia târâtă este un mijloc de a stabiliza coborîrea, oprind-o. Să considerăm bunăoare mai întâiu balonul în echilibru la o înălţime mare, iar în urmă accidental lestat. El va cădea fără posibilitate de echilibru, până când va începe a desfăşura pe pământ guideropul.

Pe măsură ce funia se târăşte pe pământ pe o lungime tot

mai mare, greutatea totală a balonului descreşte, ajungând un moment, când ruptura de echilibru negativă $(G + P - F)$ se anulează, realizându-se echilibrul.

Dacă în urmă balonul pierde, în total sau în parte, sarcina accidentală sau este umflat prin căldura solară, el se va înălţa din nou, până ce greutatea de cablu ce se ridică de pe pământ îl va readuce în echilibru. Pe măsură ce balonul ridică cablul tot mai mult, Φ descreşte şi u creşte.

Sistemul cu guiderope, deşi ingenios, e folosit puţin, deoarce micşorează vitesa balonului şi este un pericol continuu de agăţare; el se poate utiliza însă cu folos la stepe şi pe ocean.

De altfel sistemul impune o limitare a înălţimii la numai câteva zeci de metri deasupra solului.

Un sistem de stabilitate analog se întrebuinţează la *submarine*. Un asemenea vas trebue să poată naviga atât la suprafaţă cât şi în apă. Condiţiile de stabilitate la suprafaţă sunt acelea ale oricărui plutitor: centrul său de greutate trebue să fie submetacentrul corespunzător ruliului.

In poziţie cufundată subpresiunea trece prin centrul invariabil de carenă, dedesubtul căruia trebue să se găsească centrul de greutate al submarinului. Aşa dar, pentru a se trece dela suprafaţă la navigarea în apă, plutitorul va trebui lestat şi centrul său de greutate coborît, ceeace se obţine, după cum s'a expus la capitolul respectiv, introducând apă în cavităţi dispuse la partea inferioară. Cu aceeaşi ocazie s'a arătat că un lest lichid, cât timp rezervoarele nu sunt complet pline, este o cauză de diminuare a stabilităţii, şi că aceasta trebue să fie suficientă la navigarea la suprafaţă, pentru a rămâne pozitivă în timpul manevrei. Odată egalitatea de greutate obţinută, submarinul trebue teoretic să rămână între două ape, dar în practică din cauza compresibilităţei lui vasul se duce la fund, echilibrul în înălţime fiind nestabil, cu atât mai mult cu cât intervin şi defectele de etanşeitate ale vanelor, cari închid rezervoarele de apă. De aceea, menţinerea la o înălţime *medie* determinată se obţine prin o serie de urcări şi coborîri, expulzare sau introducere de apă în rezervoare, întrebuinţare de elice cu axă verticală, cârmă cu axă orizontală, etc.

In mările cu adâncime relativ mică, de ordinul de $50\ m$, submarinul se pate lăsa la fund pentru repaus, iar pentru a se menţine la o adâncime $h < H$ se poate întrebuinţa metoda cu *guiderope*. Vasul fiind rânduit astfel ca să poată pluti la suprafaţă, i se atârnă înainte şi înapoi două greutăţi prin cabluri de o lungime $H - h$. Greutăţile aşezându-se pe fund, vasul se va uşura brusc şi se va ridica.

5. Câteva ascensiuni cu balonul în scopuri ştiinţifice.

Ascensiuni cu balonul pentru explorarea atmosferei s'au întreprins în *Franţa şi Anglia*, iar mai târziu în *Germania* şi *Rusia* acest mijoc fiind cel mai potrivit pentru astfel de studii.

Demni de menţionat sunt *Berson* şi *Süring* (germani), cari în 1901 au atins altitudinea de *10800 m*, un record deţinut 30 ani până la ultimile progrese realizate.

In timpurile recente studiile navigaţiei aeriene au fost completate prin cercetări în domeniul climatologiei şi acela al radiaţiilor. De asemenea pe lângă problemele ştiinţifice s'au studiat şi diverse probleme practice, d. e. condiţiile atmosferei până la *10000* şi la *15000 m*, care interesează aviaţia cu motor.

In 1928 s'a construit în Germania balonul pentru mari altitundini (Fig 212) *Barfsch v. Sigsfeld* de *10000 m³* capacitate, cu umplere de hidrogen şi o greutate de circa *2000 kg*. Un dispositiv nou permitea acestui balon, independent de gradul său momentan de umplere, să stea în echilibru la o înălţime determinată. S'a construit în axă un cămin vertical pe întreaga înălţime a balonului, având inele de rigiditate şi fiind prevăzut la partea inferioară cu un orificiu reglabil automat, care putea limita volumul de gaz al balonului la o anumită cantitate. Excesul de gaz se scurgea, nu în jos prin apendice, ci în sus prin cămin.

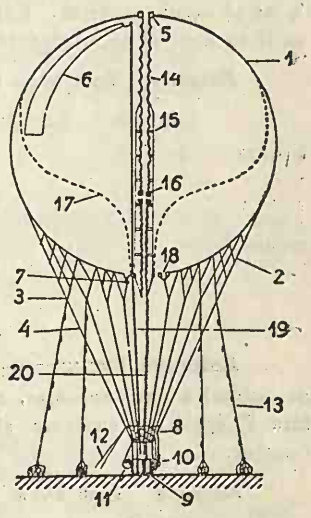


Fig. 212

Acest balon putea atinge un plafon de circa *13000 m*.

Al doilea balon similar a fost construit la Augsburg pentru prof. *Piccard*, având *14000 m³* capacitate şi o greutate de numai *1480 kg*, iar inclusiv persoanele, aparatele, etc. circa *1900 kg*; cu acest balon s'a atins un plafon de peste *16000 m*. Cabina lui era sferică şi ermetic închisă.

Baloanele ruse şi americane au fost construite pe aceleaşi principii.

Balonul american *Explorer* avea *85000 m³* capacitate, însă la prima ascensiune a plesnit la *18230 m*, echipajul salvându-se cu paraşuta dela *1200 m*.

In Noemvrie 1935 americaniii *Stevens* şi *Anderson* cu *Explorer II* de *105000 m³* capacitate au întreprins o ascensiune până la

22600 *m*, plafon atins în $4^3/_4$ ore. Coborârea a durat 3 ore, iar aterisarea a avut loc la 400 *km* dela punctul de plecare. Balonul umplut avea o înălțime de 81,5 *m* și un diametru de 58,6 *m*, iar nacela-sferă din metal usor avea 2,75 *m* diametru. La o forță ascensională de 9150 *kg* balastul era de circa 40%. Gazul folosit a fost helium, supapele fiind manevrate cu aer comprimat.

Până la altitudini de 7000 *m* sunt suficiente pentru respirație aparatele simple cu oxigen. La 9000 *m* presiunea parțială a oxigenului scade la 7% și pentru compensație trebuie administrat plămânilor un amestec de 3 ori mai bogat în oxigen. Cum însă din cauza marei pierderi de căldură, evaporării intense și altor cauze necunoscute, consumația oxigenului este cu mult mai mare de cât la nivelul solului, dela altitudinea menționată în sus se impune respirația cu 10—14 *litri pe minut* oxigen la presiunea atmosferii.

Aplicația Nr. 82. Un balon conține $V = 1\ m^3$ aer la aceeași temperatură θ_0 ca și aerul exterior. Care va fi forța ascensională F, dacă aerul din interior va fi încălzit la temperatura θ?

Răspuns. Vom avea în general

$$F = V(\varpi - \varpi')$$

și cum

$$\varpi = \frac{p_0}{RT_0}, \qquad \varpi' = \frac{p_0}{RT'},$$

rezultă:

$$F = \frac{p_0}{R}\left(\frac{1}{273+\theta_0} - \frac{1}{273+\theta}\right).$$

Aplicația Nr. 83. A se calcula forța ascensională F/V (redusă la unitatea de volum) a unui aerostat, cunoscând presiunea exterioară p, temperatura absolută T egală în exterior și în interior și constantele gazelor R exterior și R' interior.

Răspuns. Vom avea

$$\frac{F}{V} = \varpi - \varpi' = \frac{p}{T}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Aplicația Nr. 84. Formula rezistenței aerului la mișcarea unui balon se poate pune sub forma:

$$R_a = \zeta p S u^2 = \Phi u^2,$$

unde S este în m^2 secțiunea maximă a balonului, normală pe viteză, iar ζ așa numitul *coeficient de rezistență*, care este un număr pur, întru cât monomul care urmează și care cuprinde cei trei parametri fundamentali p, S și u, de care depinde R (presupunem baloane geometricește asemenea), are dimensile unei forțe.

O formulă folosită pentru puterea de propulsiune a unui balon este:

$$N = \frac{Su^3}{2250} CP.$$

A se calcula coeficientul de rezistență corespunzător.

Răspuns. Puterea în *kgm/sec* este

$$Ru = 75 N,$$

de unde

$$\zeta \rho S u^3 = \frac{75 S u^3}{2250}.$$

Punând, cum se obișnuește, $\rho = \frac{1}{8}$, găsim

$$\zeta = \frac{8 \times 75}{2250} = 0{,}26,$$

ceece pentru $\Phi = KD^2$ dă $K = \zeta\rho \frac{\pi}{4} = 0{,}025$, în loc de $K = 0{,}0225$ admis la p. 337.

Aceasta corespunde cu lista coeficienților de rezistență, stabiliți de experiențele lui *Frank* asupra baloanelor:

pentru cilindri circulari cu închidere	plană	$\zeta = 0{,}553$
„ „ „ „ „	conică (90°)	$\zeta = 0{,}368$
„ „ „ „ „	„ (60°)	$\zeta = 0{,}352$
„ „ „ „ „	hemisferică	$\zeta = 0{,}260$
„ elipsoide ascuțite		$\zeta = 0{,}200$

Aplicația Nr. 85. Două baloane, geometricește asemenea, prezintă un raport de similitudine liniară λ, iar vitesele lor raportul β. În ce raport vor trebui să fie puterile necesare propulsiunei lor?

Răspuns. Formula puterii fiind de forma

$$P = R_a u = \zeta \rho S u^3,$$

raportul căutat va fi evident $\lambda^2\beta^3$.

Aplicația Nr. 86 Zeppelinul *Hansa* la o călătorie de probă cu o putere motoare de *500 CP* a atins o vitesă $u = 22\ m/sec$.

Rezistența dirijabilului fiind evaluată la $Ra = 2{,}5\,u^2$, care a fost randamentul propulsorului? (*Rev. Dornier* 1913).

Răspuns.

$$\eta = \frac{2{,}5\,u^3}{75 \times 500} = 0{,}71.$$

Aplicația Nr. 87. Un balon cu hidrogen urmează să ridice în afară de echipajul său de *3* oameni (a *80 kg* greutate) un motor de *450 kg* și alte sarcini, inclusiv greutatea proprie de *2800 kg*, desvoltând o forță ascensională $F = 1370\ kg$, la o presiune barometrică de *730 mm* și o temperatură $\theta = 20^0$. Ce capacitate trebue dată balonului?

Răspuns. Vom avea

$$F = V(\varpi - \varpi') - G$$

cu $F = 1370\,kg$ și $G = 3490\,kg$; cum pe de altă parte $\varpi = \frac{p}{RT}$ cu $p = 10333\,kg/m^2 \times 730/760$ și $T = 273 + 20^0$, ceeace pentru constantele $R_{aer} = 29{,}27$ și $R_H = 422{,}59$ conduce la

$$\varpi = 1{,}16\,kg/m^3 \qquad \varpi' = 0{,}08\,kg/m^3,$$

rezultă

$$V = 4500\,m^3.$$

Aplicația Nr. 88. Un balon umflat de capacitate V ridică greutatea totală G într'o atmosferă *izotermă*. A se găsi plafonul pe care balonul îl va putea atinge cunoscând constantele R și R'.

Răspuns. Plafonul corespunde unei forțe ascensionale nule. Vom avea deci

$$\varpi - \varpi' = \frac{G}{V},$$

rezultând pentru presiunea respectivă

$$p = \frac{G}{V} \frac{T}{1/R - 1/R'}.$$

Dacă la sol avem ϖ_0 și p_0, adică

$$\varpi_0 = \frac{p_0}{RT},$$

vom putea elimina pe T, scriind

$$p = \frac{G}{V\varpi_0} \frac{p_0}{1 - R/R'}$$

și după formula barometrică:

$$Z = RT \log \frac{p_0}{p} = RT \log \left[\frac{V\varpi_0}{G} \left(1 - R/R' \right) \right].$$

Aplicația Nr. 89. Un balon umflat de capaci'ate V ridică greutatea totală G într'o atmosferă cu repartiție *adiabatică*. A se calcula plafonul Z.

Răspuns. Avem și aici, ca și în aplicația precedentă, la plafonul Z

$$\varpi - \varpi' = \frac{G}{V}, \qquad p = \frac{G}{V} \frac{T}{1/R - 1/R'}.$$

Cum însă $p = \varpi RT$ iar după aplicația Nr. 80 avem

$$\varpi_z = \varpi_0 \left[1 - \frac{1 - \gamma}{\gamma RT} Z \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}},$$

rezultă

$$Z = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_0 \left[1 - \left(\frac{G}{V\varpi_0} \frac{R'}{R' - R} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicația Nr. 90. Pentru balonul din *aplicația Nr. 87*, care va fi plafonul într'o atmosferă izotermă și care într'o atmosferă adiabatică?

Răspuns. Conform *aplicației Nr. 88* vom avea pentru cazul atmosferei *izoterme*:

$$Z_i = 8000\left(1+\frac{20}{273}\right)\log\left[\frac{4500.1,16}{3490}\left(1-\frac{29,27}{422,59}\right)\right] = 2837\ m.$$

Conform *aplicației Nr. 89* vom avea pentru cazul unei stratificări *adiabatice*:

$$Z_a = 3742\ m.$$

Aplicația Nr. 91. Un balon sferic *închis* de rază r umflat la p_0 atinge altitudinea Z. Care va fi tensiunea pe metru liniar în îmbrăcăminte, admițând cazul *izoterm*?

Răspuns. Aplicând formula barometrică

$$Z = H\log\frac{p_0}{p} \text{ cu } H = 8000\left(1+\frac{0}{273}\right),$$

deducem

$$p_0 - p = p_0\left(1 - e^{-\frac{Z}{H}}\right).$$

Pentru tensiunea σ găsim la balonul sferic

$$\pi r^2 (p_0 - p) = 2\pi r\sigma$$

$$\sigma = \frac{rp_0}{2}\,\frac{e^{\frac{Z}{H}}-1}{e^{\frac{Z}{H}}}.$$

Aplicația Nr. 92. Un balon sferic, a cărui îmbrăcăminte cântărește $b\ kg$ pe m^2 și care are de luat greutatea sa proprie, trebue să atingă plafonul Z. Care trebue să fie raza r?

Răspuns. După *aplicația Nr. 88* avem

$$Z = RT\log\left[\frac{V\varpi_0}{G}\left(1-\frac{R}{R'}\right)\right],$$

în care, dacă introducem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,\quad G = 4\pi r^2 b,$$

obținem

$$r = \frac{3b}{\varpi_0}\,\frac{R}{R'-R}\,e^{\frac{Z}{RT}}.$$

Aplicația Nr. 93. Cu cât se modifică plafonul unui balon în atmosfera izotermă, dacă în loc de hidrogen (R') se umple cu gaz de iluminat (R'')?

Răspuns. Avem

$$Z' = RT\log\left[\frac{V\varpi}{G}\left(1-\frac{R}{R'}\right)\right]$$

BCU IAȘI / CENTRALA UNIVERSITARĂ

$$Z'' = RT \log \left[\frac{V \varpi}{G} \left(1 - \frac{R}{R''} \right) \right],$$

de unde

$$Z' - Z'' = RT \log \frac{R''(R' - R)}{R'(R'' - R)}$$

şi cum

$$R = 29{,}27\,, \quad R' = 422{,}59\,, \quad R'' = 67{,}1\,\%,$$

rezultă

$$Z - Z' = 14{,}64\,T.$$

Aplicaţia Nr. 94. Dirijabilul construit de firma *Siemens-Schuckert Berlin*, are o lungime $l = 130\,m$ şi un diametru $d = 13\,m$. El are două gondole cu câte două motoare de *125 CP* fiecare, care trebue să desvolte o vitesă de *60 km/oră*.

A se calcula numărul de *cai putere* necesari efectiv pentru învingerea rezistenţei aerului, admiţând că între motor şi propulsor se pierde *20 %* în rezistenţe secundare.

Răspuns. Admiţând că dirijabilul are forma unui elipsoid ascuţit, rezistenţa sa frontală comportă un coeficient, după *Frank*, $\zeta = 0{,}2$. Pentru rezistenţa aerului pe suprafaţa laterală S', acelaşi autor dă coeficientul $\zeta' = 0{,}00244$.

$$\text{Cu } \rho = \frac{1}{8}\,, \quad u = 16{,}67\,m/sec\,, \quad S = \frac{\pi d^2}{4}\,, \quad S' = \pi d l$$

găsim

$$R_a = 922\,kg \text{ şi } R_a' = 450\,kg,$$

astfel că

$$P = (R_a + R_a')\,u = 22900\,kgm/sec$$

sau *305 CP*. Ţinând seama şi de rezistenţele secundare de *20%*, rezultă o putere necesară de *371 CP*. Dirijabilul este echipat cu motoare de *500 CP*, deci o putere acoperitoare.

Aplicaţia Nr. 95. Un balon cilindric de diametru $D = 4\,m$ cu închideri hemisferice trebue să navige cu *15 m/sec* vitesă. Motoarele de cari se dispune cântăresc *5 kg/CP*. Ce lungime x trebue să aibă balonul pentru a face faţă strict greu ăţii motoarelor? Se va lua $\varpi = 1{,}2$ şi $\varpi' = 0{,}08$ iar rezistenţele accesorii se vor socoti cu $n = 50\%$ din puterea motoarelor.

Răspuns. Ca şi mai sus vom avea:

$$R_a + R_a' = \rho\,(\zeta S + \zeta' S')\,u^2,$$

luând

$$\zeta = 0{,}25\,, \quad S = \frac{\pi D^2}{4}\,, \quad \zeta' = 0{,}00244\,, \quad S' = \pi D x.$$

Puterea utilă va fi

$$P_u = (R_a + R_a')\,u\,,$$

iar ceea brută

$$P = \frac{1}{1-n} P_u\,,$$

rezultând pentru greutatea motoarelor

$$G_m = 9\frac{P}{75}.$$

Cum lungimea căutată este x, vom avea pentru ridicarea acestei greutăți

$$G_m = V(\varpi - \varpi') = Sx(\varpi - \varpi').$$

Ecuația în x se poate pune acum ușor (după împărțirea cu πD)

$$\frac{9}{75}\frac{1}{1-n}\rho u^3\left(\zeta\frac{D}{4} + \zeta' x\right) = \frac{D}{4}\left(\varpi - \varpi'\right)x.$$

Cu $n = 0{,}5$ obținem

$$x = 14{,}5\ m.$$

Aplicația Nr. 96. Un balon umflat plutește la o anumită altitudine, temperatura fiind de $\theta = 20^0$. Cu cât el se va ridica în urma unei dilatări isoterme cu 1%?

Răspuns. Avem la început

$$Z = H \log \frac{p_0}{p}$$

cu

$$H = RT = 8000\left(1 + \frac{\theta}{273}\right).$$

După dilatare vom avea:

$$Z_1 = H \log \frac{p_0}{p_1} \quad \text{și deci} \quad Z_1 - Z = H \log \frac{p}{p_1}$$

și punând $\theta = 20^0$, $p_1 = 0{,}99\,p$ obținem

$$H = 8580\ m \quad \text{și} \quad Z_1 - Z = 86{,}2\ m,$$

cu cât se va mai urca balonul.

Aplicația Nr. 97. Cu cât se schimbă plafonul unui balon umflat, dacă temperatura aerului și a gazului crește cu 1^0?

Răspuns. Avem pentru plafon în cazul atmosferei izoterme cu T

$$Z = RT \log\frac{p_0}{p} = RT \log \frac{V}{G}\frac{p_0}{T}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

iar în cazul atmosferei izoterme cu T_1

$$Z_1 = RT_1 \log \frac{V}{G}\frac{p_0}{T_1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

astfel că

$$\frac{Z}{T} - \frac{Z_1}{T_1} = R \log \frac{T_1}{T}.$$

Punând acum (cu nesocotirea regulei dimensionale)

$$T_1 = T + 1^0 \text{ și } \log\frac{T_1}{T} = \log\left(1 + \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{T} - \frac{1}{2T^2} + \frac{1}{3T^3} - \cdots$$

și mulțumindu-ne numai cu primul termen, obținem

$$\frac{Z}{T} - \frac{Z_1}{T + 1^0} = \frac{R}{T} \quad \text{sau} \quad Z - Z_1 = R + \frac{R - Z}{T}.$$

Așa dar, după cum $Z \gtrless (T+1)R$ avem o micșorare sau o mărire a plafonului.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicația Nr. 98. A se socoti balastul ce trebue luat pentru ca balonul de capacitate V să atingă plafonul Z în o atmosferă cu repartiție adiabatică.

Răspuns. Socotind la plecare ruptura de echilibru nulă, avem

$$V(\varpi_0 - \varpi'_0) - (G_Z + f_Z) = 0,$$

iar la plafon

$$V(\varpi_Z - \varpi'_Z) - G_Z = 0,$$

de unde

$$f_Z = V[(\varpi_0 - \varpi_Z) - (\varpi'_0 - \varpi'_Z)].$$

La *aplicația Nr. 80* am văzut că

$$\varpi_0 - \varpi_Z = \frac{\varpi_0 Z}{\gamma R T_0}.$$

Pe de altă parte pentru aer

$$p_Z = p_0 \left(\frac{\varpi_Z}{\varpi_0}\right)^\gamma$$

iar pentru gaz

$$p'_Z = p_0 \left(\frac{\varpi'_Z}{\varpi'_0}\right)^\gamma$$

și cum în cazul nostru $p_0 = p'_0$ și $p_Z = p'_Z$, rezultă

$$\frac{\varpi'_Z}{\varpi'_0} = \frac{\varpi_Z}{\varpi_0} \text{ sau } \varpi'_0 - \varpi'_Z = \frac{\varpi'_0 Z}{\gamma R T_0}$$

astfel că

$$f_Z = \frac{V Z}{\gamma R T_0}\left(\varpi_0 - \varpi'_0\right).$$

Aplicația Nr. 99. Cu cât se schimbă plafonul unui balon umflat, dacă, prin radiere asupra îmbrăcămintii lui, temperatura gazului crește dela θ la θ_1, atmosfera fiind aprox. isotermă? Care este această schimbare în cazul hidrogenului?

Răspuns. La plafon avem

$$\varpi - \varpi' = \frac{G}{V} = p\left(\frac{1}{RT} - \frac{1}{R'T'}\right),$$

astfel că altitudinea plafonului, în cazul aplicării, aproximativ, a formulei barometrice (isotermie la aer), dacă introducem în aceasta, valoarea lui p dela plafon, rezultă:

$$Z_1 = RT \log \frac{p_0}{p} = RT \log \left[\frac{p_0 V}{G} \cdot \frac{R'T' - RT}{RR'TT'}\right],$$

pe când dacă $T' = T$

$$Z = RT \log \left[\frac{p_0 V}{G} \frac{R' - R}{RR'T}\right].$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Diferența va fi

$$Z_1 - Z = RT \log \left[1 + \frac{R}{R' - R} \frac{T' - T}{T'} \right]$$

și dacă luăm și aici aproximativ $\log (1 + \varkappa) \cong \varkappa$, găsim

$$Z_1 - Z = \frac{R^2}{R' - R} T \left(1 - \frac{T}{T'} \right).$$

Pentru hidrogen $R' = 422{,}59$, pentru aer $R = 29{,}27$, astfel că aproximativ

$$Z_1 - Z = 2{,}18 \ (0' - 0).$$

Aplicația Nr. 100. Cu cât crește capacitatea de transport a unui balon umflat, dacă temperatura aerului scade cu 0^0? Care este această creștere în cazul când gazul de umplere este hidrogenul?

Răspuns. Am văzut că, în atmosferă izotermă, avem la plafon

$$G = \frac{V_p}{T} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right),$$

iar dacă temperatura aerului a scăzut cu 0 grade

$$G_1 = V_p \left[\frac{1}{R (T - 0)} - \frac{1}{R' T} \right],$$

Deducem

$$G_1 - G = G \frac{R}{R' - R} \frac{0}{T - 0}.$$

Pentru hidrogen $R' = 422{,}59$, pentru aer $R = 29{,}27$ și deci

$$G_1 - G = 1{,}07\, G \frac{0}{T - 0}.$$

Aplicația Nr. 101 Cu cât crește capacitatea de transport a unui balon umflat, dacă temperatura gazului crește cu $0'$? Care este această creștere în cazul hidrogenului?

Răspuns. Calculul se face ca mai sus, găsindu-se

$$G_1 - G = G \frac{R}{R' - R} \frac{0'}{T + 0'},$$

iar pentru hidrogen $= 0.074 \frac{0'}{T + 0'}$.

Aplicația Nr. 102. Care este forța ascensională a unui balon, al cărui conținut în gaz rămâne invariabil (balon flasc sau sbârcit), în ipoteza că aerul și gazul au aceeași temperatură?

Răspuns. Balonul este cu *greutate de gaz constantă*

$$G' = v \varpi'.$$

Forța ascensională este constantă, căci forța ascensională este

$$F_1 = v (\varpi - \varpi') = G' \left(\frac{\varpi}{\varpi'} - 1 \right) = G' \left(\frac{R'}{R} - 1 \right) = const,$$

fiind independentă de altitudine, atât timp cât balonul nu este complet umflat.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ IAȘI

Aplicaţia Nr. 103. Cu cât se modifică forţa ascensională a unui balon flasc, dacă temperatura T a aerului diferă de T' a gazului? A se raporta această modificare la *1 kg* aer deslocuit.

Răspuns. Ca şi în aplicaţia precedentă, însă cu $T \neq T'$, avem

$$F'_1 = G'\left(\frac{R'T'}{RT} - 1\right).$$

Greutatea aerului deslocuit fiind

$$G = G'\frac{\varpi}{\varpi'} = G'\frac{R'T'}{RT},$$

modificarea în chestiune, raportată la unitatea aerului deslocuit, este

$$\frac{F'_1 - F_1}{G} = 1 - \frac{T}{T'}.$$

În cazul particular când $T' = T - 1$, avem

$$1 - \frac{T}{T-1} = -\frac{1}{T-1} = -\frac{1}{273+0}\ kg$$

de fiecare *kg* de aer deslocuit.

Aplicaţia Nr. 104. Cu cât se răceşte gazul unui balon flasc când se ridică cu *100 m*, în ipoteza că îmbrăcămintea lui este impermeabilă la căldură, adică gazul se dilată adiabatic?

Răspuns. La atmosfera izotermă avem (diferenţiala formulei barometrice):

$$dz = -RT\frac{dp}{p}.$$

Pe de altă parte, în cazul unei evoluţiuni adiabatice (aici a gazului interior), din

$$\frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\varpi}{\varpi} = 0$$

şi ecuaţia fizică

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\varpi}{\varpi} = R\frac{dT}{T}$$

deducem prin eliminarea lui $\frac{d\varpi}{\varpi}$ şi înlocuirea $\frac{\gamma - 1}{\gamma R} = \frac{1}{JC}$

$$dT = \frac{1}{JC}\frac{RT}{p}dp.$$

Rezultă

$$\frac{dz}{dT} = -CJ$$

şi cum $C = 0{,}238$ iar $J = 427$, obţinem

$$\frac{dz}{dT} = -102.$$

Cu alte cuvinte dacă balonul flasc se urcă cu cinca *100 m*, gazul se răcesţe cu *1°*.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicația Nr. 105. Folosind *aplicația Nr. 80* a se calcula momentul de stabilitate al unui balon cilindric de secțiune S și lungime l, care plutește orizontal, în jurul centrului său O pentru o înclinare α. Se va presupune că compartimentarea balonului nu permite deplasarea gazului în interior, ϖ' rămânând peste tot constant pe când ϖ al aerului variază cu altitudinea, conform celor arătate în *aplicația Nr. 80.*

Soluție. Fie ϖ_0 greutatea specifică a aerului la cota centrului *0.* La abscisa x, pe axa înclinată a cilindrului, vom avea o ridicare (respectiv coborîre) $z = x \sin \alpha$ și prin urmare în acel loc

$$\varpi = \varpi_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma R T^0} x \sin \alpha\right).$$

Balonul va continua a pluti dacă, făcând abstracție de greutatea proprie a balonului, ϖ' al gazului va rămâne egal cu greutatea specifică medie ϖ_m a aerului deslocuit.

Ori

$$\varpi_m = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{+l/2} \varpi_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma R T_0} x \sin \alpha\right) dx = \varpi_0$$

și cum prin ipoteză $\varpi' = \varpi_0$ (fiindcă am presupus că balonul plutea orizontal la la plafon), rezultă pentru punctele depe axa înclinată:

$$\varpi' - \varpi = \varpi_0 \frac{x \sin \alpha}{\gamma R T_0}.$$

Momentul de stabilitate al balonului, adică care va tinde a readuce balonul în poziția orizontală, va fi, așa dar,

$$2\int_0^{l/2} (\varpi' - \varpi) S\, dx\, x \cos \alpha = \frac{2 \varpi_0 \sin \alpha \cos \alpha}{\gamma R T_0} S \int_0^{l/2} x^2\, dx = \frac{1}{12} \frac{\varpi_0 \sin \alpha \cos \alpha}{\gamma R T_0} S l^3.$$

Aplicația Nr. 106. A se aplica principiul apendicelui la punerea sub presiune a unei săli încălzite în timpul iernei.

Se știe că o sală se poate ventila fie prin punerea ei *sub presiune*, d. e. printr'un ventilator care aspiră aer din exterior (de preferință de sus sau din o grădină) și îl împinge în sală (cu eșirea prin orificii speciale și prin interstițiile eventuale de la uși și ferestre), fie prin *depresiune*, d. e. prin aspirația aerului viciat și expulzarea lui în afară. Poziția orificiilor de intrare și eșire a aerului trebue să fie aleasă astfel încât curentul de circulație să nu jeneze persoanele din sală. In cazul de față este vorba de punerea sub presiune a sălii *fără ventilator.*

Soluție. Se va instala, plecând dela nivelul pardoselei în jos, de preferință lângă aparatul de încălzire (radiator sau sobă, al cărei tiraj nu va fi astfel supărător), un tub sau canal descendent pe lângă perete, având gura inferioară în comunicație cu exteriorul.

Sala se poate compara în acest caz cu un balon plin cu aer cald, mai puțin dens ca aerul rece din afară, iar tubul sau canalul în chestiune va juca rolul de apendice. La gura inferioară a acestuia presiunea interioroară fiind aceeași cu cea din afară, curbele (aproximativ drepte) de repartiția presiunei în interior și în exterior vor porni dela același punct și se vor depărta una de alta din ce în ce mai mult în spre tavanul sălei, dând prin această depărtare măsura suprapresiunei

la diferitele cote din interiorul sălei ca în fig. 209. Minimul acestei suprapresiuni, care va fi la cota pardoselei şi maximul dela tavan vor fi ambele cu atât mai mari, cu cât gura apendicelui va fi mai jos.

Procedeul în chestiune a fost pus în practică la Călimăneşti (1913) de către Ing. *Marcel Djuvara* la o încăpere de parter, executându-se sub pardoseală, pe lângă perete şi sobă, un cămin, pus la fund în legătură cu un puţ săpat în exterior de cealaltă parte a fundaţiei peretelui.

In felul acesta încăperea fiind pusă *sub presiune*, el a putut suprima curenţii reci supărători, cari înainte pătrundeau în special prin, interstiţiile inferioare ale uşilor.

O publicaţie asupra acestei probleme a apărut sub semnătura sa în o revistă germană de specialitate.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PRIVIRE ISTORICĂ [1])

Ἄριστον μὲν ὕδωρ.
Thucydide

Problemele variate ce se pun în vremurile noastre în legătură cu diversele utilizări ale apei sau pentru combaterea pericolelor pe care ea îl prezintă uneori (revărsări, inundații, etc.) sunt îndeajuns de cunoscute; mijloacele technice de care dispunem astăzi pentru soluționarea acestor probleme sunt de domeniul fie al ingineriei de construcție, fie al ingineriei mecanice.

Printre marile aplicațiuni ale Hidraulicei ne mărginim doar a menționa:

Captările de apă de isvor, de apă subterană sau de apă superficială, aprovisionarea și distribuirea de apă potabilă, industrială sau pentru scopuri agricole;

Canalizarea, evacuarea și purificarea apelor folosite:

Amenajarea căderilor de apă și echiparea uzinelor pentru utilizarea energiei hidraulice;

Amenajarea cursurilor naturale de apă, rectificări, apărări de maluri, constituiri de lacuri-rezervoare, etc. în vederea regulării regimului cursurilor sau pentru scopuri de navigație;

Apărarea contra inundațiilor și valorificarea regiunilor inundabile;

Navigația interioară și maritimă cu toate instalațiile lor portuare, unele manevrate cu mijloace hidraulice;

Irigarea terenurilor în regiuni cu regim secetos:

Construirea de apeducte, canale de navigație, irigație, etc;

Desecarea terenurilor inundabile;

Motoare și mașini hidraulice pentru diferite scopuri precum: prese hidraulice cu diverse întrebuințări industriale, acumulatori hidraulici, macarale, ascensoare, motori hidraulici cu piston, pompe rotative și pompe centrifuge, mașini diverse pentru ridicat lichide, receptori hidraulici ca: roți și turbine de tot felul, propulsori pentru vase, etc., fără a mai menționa instala-

1) Pentru autorii folosiți vezi bibliografia.

ţiile, maşinile şi aparatele pentru aer şi gaze, cu cari cele pentru apă au mare analogie.

Hidrodinamica până la Euler. Incă din vremurile cele mai îndepărtate proprietăţile principale ale apei au interesat omenirea, din cauza rolului important pe care apa îl are în viaţa omului, animalelor şi a plantelor. Captarea şi distribuirea apei a reclamat treptat crearea de diferite mijloace artificiale: baraje, stăvilare, canale, conducte, instalaţiuni de ridicare, uneori mişcate cu ajutorul unor roţi cu găleţi sau palete. Intocmirei rudimentare a instalaţiilor, cari se văd pe baso-reliefurile şi în descrierile antice, i-a urmat construcţia mai sistematică a lucrărilor hidraulice din timpul egiptienilor, romanilor şi arabilor. Resturi se mai găsesc şi astăzi, unele chiar în funcţiune, arătând însă puţina cunoştinţă din acea vreme a legilor cari guvernează mişcarea fluidelor.

Arhimede (287-212 i. H.) a găsit empiric legile Hidrostaticei, tratându-le într'o lucrare, din care a rămas o traducere latină. In ea se menţionează legea presiunei, datorită greutăţei coloanei de apă suprapuse, crescând cu adâncimea, şi se deduce forma sferică a unei mase fluide, care îşi caută echilibrul, ascultând de atracţia gravităţei spre centrul sferei.

El mai deduce şi pierderea aparentă de greutate a corpurilor muiate în apă, datorită rezultantei presiunilor, descoperind acest principiu, după cum spune *Plutarch*, în timpul când se afla în baie.

Cu acestea şi încă alte câteva noţiuni, precum şi cu legile de stabilitate ale unui număr oarecare de corpuri plutitoare de forme regulate, s'au pus din vreme bazele *Hidrostaticei*.

In ceeace priveşte *mişcarea* fluidelor, nu se dispune din antichitate decât de observaţia lui *Frontinus* (100 d. H.) din descrierea conductelor de apă ale Romei, conduse de dânsul, anume că *debitul printr'un tub depinde nu numai de diametru dar şi de nivelul rezervorului de alimentare*.

Astfel nici antichitatea nici evul mediu n'a dat nimic nou, până la olandezul *Stevin* (1548-1620), cunoscut prin legea echilibrului pe un plan înclinat şi prin *determinarea presiunei lichidelor pe pereţii vaselor*, cu explicarea cunoscutului *paradox hidrostatic*. Totuşi, nici el nici *Galilei*, care între altele a aplicat principiul său, al *deplasărilor virtuale*, asupra echilibrului apei într'un sifon, n'au formulat condiţiile generale de echilibru ale lichidelor.

Pe această din urmă cale însă *Pascal* (1623-1662), cu mai multă pătrundere, demonstrează că *presiunea*, produsă într'un punct

al suprafeței, se transmite *uniform în toate direcțiile* în masa unui lichid ermetic închis. În lucrarea, apărută postum (1663), *Traité de l'équilibre des ligueurs* el concepe acest mecanism de transmitere ca o mașină simplă, echivalentă cu pârghia ce amplifică forța prin întrebuințarea de pistoane cu secțiuni diferite, principiu după care, cu mult mai târziu, englezul *Bramoh* (1748—1827) construește presa hidraulică.

Desvoltărea ulterioară a Hidrostaticei este legată de problema formei pământului, de care se ocupă numeroși cercetători în legătură cu avântul Astronomiei din secolul al 17-lea. *Huygens* (1629—1695) observă că gravitația trebue să fie normală pe suprafața unui lichid în repaus, iar *Newton* (1643—1727), în al doilea volum al lucrării *Philosophiae naturalis principia mathematica*, tratează sumar legile Hidrostaticei cu extinderea lor la *fluidele elastice*, adică la gaze, fără a ajunge totuși la o formulare generală.

Această formulare, precum și noțiunea *suprafețelor de nivel* ale unui fluid în echilibru sub acțiunea unor forțe exterioare, revine (în urma unor lucrări pregătitoare ale lui *Bouguer* și *Maclaurin*) lui *Clairaut* (1713—1765). Acesta, în lucrarea sa fundamentală *Théorie dela figure dela terre* (1743), aduce problema formei pământului sub acțiunea și a forței centrifuge la un stadiu final, încheind oarecum capitolul Hidrostaticei. *Clairaut* determină deasemenea forma suprafeței unei mase lichide, care se învârtește în jurul unei axe verticale și, prin cercetări matematice foarte complete, deduce *tensiunea superficială* produsă la imersiunea unei plăci într'un lichid.

Începuturile *Hidrodinamicei* sunt datorite urmașilor lui *Galilei*, după ce acesta disperase de a lămuri fenomenul complicat al scurgerei apei. Elevul său *Castelli* (1576—1644) recunoaște proporționalitatea inversă dintre secțiunea și vitesa medie la scurgerea permanentă a apei printr'un canal, stabilind astfel *ecuația de continuitate* a scurgerei paralele permanente. La scurgerea însă printr'un orificiu, în lucrarea *Dalle misura de l'acqua corrente*, el se exprimă eronat, că viteza *de scurgere printr'un orificiu* ar fi proporțională cu adâncimea, eroare rectificată de *Torricelli*. Aceasta însă nu stabilește legea proporționalității cu rădăcina pătrată a adâncimei, ceeace dealtfel n'a reușit a face nici *Newton*, din cauza neglijării contracțiunei la eșirea din orificiu. De aceea *Lagrange* califică, drept cea mai puțin satisfăcătoare, partea respectivă din

lucrarea principală a lui *Newton*, în care în schimb se găsește destul de bine definită noțiunea *viscozității*.

In legătură cu această din urmă proprietate, rezistența întâmpinată la scurgerea apei prin canale și tuburi face obiectul unor studii, în special din partea hidraulicienilor italieni, printre cari demni de citat sunt: *Guglielmini* (1653—1710), *Grandi* (1671—1742) și *Lecchi* (1702—1766).

Măsurarea vitezelor, perfecționată de *Mariotte* (+1684) și *Pitot*, permite a se stabili, într'o secțiune transversală de canale, scăderea parabolică a vitezei cu adâncimea, fără a se arăta însă că aceasta este datorită viscozității și frecării cu pereții. Pentru prima oară *Brahms* (1754) se exprimă, că panta sau scăderea piezometrică la o scurgere uniformă servă pentru a face față frecării cu pereții.

Cu această frecare se înrudește și *rezistența la mișcare*, încercată de un corp solid într'un fluid îndefinit în repaus, rezistență pe care deja *Newton* o studiase în al doilea volum al *Principiilor*, stabilind prin experiențe, în cazul unui cilindru circular deplasat în direcția axei, proporționalitatea rezistenței cu densitatea fluidului, cu pătratul vitezei și cu secțiunea cilindrului. *Newton* însă atribue această rezistență inerției fluidului și mai face observația că, la mișcarea corpului într'un canal, rezistența este egală cu forța necesară pentru a ține corpul contra curentului ce s'ar scurge cu aceeași vitesă relativă.

Se știe că observația este justă numai pentru mișcarea într'un fluid indefinit; totuși raționamentul admirabil al lui *Newton* dă prima impulsiune problemei rezistenței. Aceasta formează de atunci obiectul unor cercetări continue, fiind tratată pe baze științifice de *Daniel Bernoulli* (1700—1782) în presupunerea unui curent paralel, cu ajutorul *principialui forfelor vii*, în Hidrodinamica sa (1738).

In această carte clasică, cuprinzând 14 capitole, sunt tratate aproape toate cazurile importante ale mișcării fluidelor, printre cari și golirea nepermanentă a unui vas, oscilațiile în tuburi comunicante, presiunea datorită deviațiunei unei vine prin prezența unei suprafețe de solid, reacțiunea fluidului în mișcare asupra pereților vasului și în fine o teorie cinetică a gazelor.

d'Alembert (1717—1783) în *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* aplică cu mare succes cunoscutul său principiu (1744), menținându-se totuși în cazul restrâns al scurgerei paralele.

Bazându-se apoi pe menționatul studiu, recent apărut, al lui *Clairaut*, reușește a obține ecuațiile mai exacte ale mișcării fluidelor.

Această lucrare este întreprinsă pe baza unui premiu al Aca-

demiei din Berlin, în *Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides* (1753), unde se ajunge, pentru mişcarea fluidelor incompresibile şi elastice, la ecuaţiuni cu derivate parţiale, aproape generale, cărora le mai lipseşte numai o definiţie riguroasă a presiunei hidraulice. In acest timp apare deasemenea studiul remarcabil al lui *Bouguer* asupra *stabilităţei vaselor* cu introducerea metacentrului în *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements* (1743), studiu desvoltat şi extins în urmă de *Euler*.

Desvoltarea Hidrodinamicei teoretice după Euler. *Leonard Euler* (1707—1783), cel mai însemnat şi productiv matematician al secolului al 18-lea, membru pe atunci al Academiei din Berlin, este stimulat la studiul amănunţit al problemelor hidrodinamice de construirea şi descrierea, de către Profesorul *Segner* din Göttingen, a unei roţi de reacţiune (1750). *Euler* desvoltă teoria acelei roţi în două lucrări, întâi tot pe baza scurgerei paralele, pentru ca apoi în tratatul său *Principes généraux du mouvement des fluides* să stabilească cele *trei ecuaţiuni riguroase ale Hidrodinamicei*, în forma lor actuală.

Euler se emancipează de vechea concepţie incompletă a presiunei, drept greutate a unei coloane de lichid, privind'o mai mult ca o mărime independentă de direcţiune. Ecuaţia de continuitate o deduce într'o altă lucrare *Novi Comentarii* a Academiei din Petersburg (1770), în care se dau indicaţiuni şi asupra unei noi reprezintări a ecuaţiilor Hidrodinamicei, cari sunt de fapt ecuaţiile cunoscute sub numele lui *Lagrange* (1736—1813), stabilite de acesta independent de lucrarea lui *Euler*. Eminentul analist *Lagrange* în a sa *Mécanique analytique* (1788) consideră principiul experimental introdus de Euler, al independenţei presiunei de direcţie, ca inutil pentru fundarea sistematică a Hidrodinamicei şi capabil numai de a întuneca legătura acesteia cu Mecanica Generală. De aceea expunerea sa asupra Hidrostaticei începe cu deducerea acestei proprietăţi din principiul deplasărilor virtuale.

El tratează în special, ca exemplu pentru formulele sale, scurgerea în o singură dimensie, semnalează însă cu multă precizie caracterul lor aproximativ şi arată cum se poate ajunge la nevoe la aproximaţiuni mai mari. In fine încearcă cu succes o teorie a undelor cu mici deplasări a particulelor lichide.

Din comparaţia între lucrările hidrodinamice ale lui *Euler* şi acelea ale lui *Lagrange*, pe cari timpul nu le desparte mult una de alta, ceeace frapează la primul este covârşitoarea bogăţie de

gândire şi nemărginita răbdare în prelucrarea numeroaselor exemple practice, pe când la al doilea stârneşte admiraţie abilitatea de analist şi riguoarea formală a desvoltărilor matematice, extrem de elegante. Diferenţa fundamentală dintre cei doi cercetători, ca metodă de lucru şi gândire, apare şi în faptul că *Euler* dă numeroase figuri pentru lămurirea expunerei sale, pe când *Lagrange* renunţă la orice reprezintare grafică, lăsând de o parte şi orice aplicaţie. In epoca care a urmat a predominat printre matematicieni influenţa lui *Lagrange*, căruia i se datoreşte în orice caz subordonarea formală a Hidrodinamicei la Mecanica analitică, graţie mai marei generalităţi a metodelor sale, faţă de acelea ale lui *Euler*. Astfel se explică şi direcţia abstractă imprimată desvoltărei ulterioare a acestei ramuri teoretice, care de timpuriu s'a despărţit de *Hidraulica Technică*.

Această tendinţă este manifestată şi în studiul *mişcărei undelor*, pe care *Euler* o studiase numai la coarde. *Laplace*, în lucrarea sa *Sur les ondes* (1776), desvoltă prima teorie matematică a undelor de apă cu mică amplitudine într'un canal de adâncime constantă, dând expresia, curentă astăzi, a vitezei de propagare.

Cu problema *valurilor* se ocupă unul din cei mai abili analişti francezi, *Poisson* (1781—1840), cu ocazia unui concurs al Academiei din Paris, în *Mémoire sur la théorie des ondes* (1816). In această lucrare el urmăreşte propagarea unei perturbaţiuni bruşte prin calcule complicate, reluate de *Cauchy* (1827) şi mai târziu de *Thomson* (1887), *Burnside* (1888), *Fraţii Weber* şi *Boussinesq*.

In fine *Stokes* (1847) dă într'o formă simplă un studiu asupra undelor oscilatoare, iar *Helmholz* (1889) publică o lucrare fundamentală *Zur Théorie von Wind und Wellen*.

Chiar *Lagrange* recunoscuse că mişcarea ondulatoare de mică amplitudine a lichidelor perfecte aparţine formei (studiate pentru prima oară de *Euler*), care admite ceeace *Helmholz* numeşte mai târziu un *potenţial de viteză* (1858) şi de care se ocupă mai departe *Cauchy* (1827) şi *Green* (1828).

In modul acesta se schiţează în esenţă desvoltarea teoriei *scurgerei potenţiale*, care apoi se completează repede de *Stokes W. Thomson*, *Helmholz* şi *Kirchhoff*. Lui *Stokes* îi mai revine aplicarea teoriei şi la mişcări cu o axă de simetrie (1842), apoi introducerea *funcţiunei de curent*, asociată cu potenţialul de viteză (1847) şi, în fine, cunoscuta transformare a unei integrale de linie a vitezei într'o integrală de suprafaţă (1854).

Lui *Thomson* i se datoreşte studiul proprietăţei acestei integrale de linie, numită de dânsul *circulaţie* (1868), pe când *Helmholz* (1868) şi *Kirchhoff* (1869) studiază mişcări fluide plane şi vine discontinue prin metoda *transformărilor conforme*.

Tot aci mai trebuesc citate unele lucrări ale lui *Dirichlet* (1852 şi 1860), *Riemann*, *C. A. Bjerkness* şi *V. Bjerkness* (1900).

O cale nouă a cercetărilor hidrodinamice este deschisă de *Helmholz* (1821—1894) prin tratatul său celebru asupra integralelor ecuaţiilor hidrodinamice, cari corespund *mişcărilor rotaţionale sau turbilionare* (1858). In acest tratat supune unui studiu aprofundat mişcările de fluid *rotaţionale*, adică fără potenţial de viteză, observate de *Euler* şi *Lagrange*, dând o analiză completă a mişcărei rotaţionale a fluidelor perfecte, cu aplicaţiuni la diferite cazuri particulare şi cu referire la verificarea experimentală a teoriei, prin care teorema lui Stokes menţionată ia o importanţă fizică deosebită.

La desvoltarea mai departe a teoriei rotaţionale, care puţin după aceea este utilizată de *Maxwell* în lucrările sale clasice pentru electricitate, contribuesc în special *W. Thomson* (1868) şi *J. J. Thomson* (1883), cari, din indestructibilitatea teoretică a vârtejurilor într'un fluid perfect trag concluziuni foarte avansate asupra constituţiei atomilor. De mişcarea nerotaţională ţine şi teoria figurilor de echilibru ale masselor fluide libere în rotaţie, sub singura acţiune a atracţiilor mutuale dintre particule, teorie care, fundată de *Clairaut* şi *Maclaurin*, este dusă mai departe de *Jacobi* (1834), *Poincaré* (1885) şi *Darwin* (1887).

Instabilitatea efectivă, contrar exigenţelor teoriei, a vârtejurilor fluide îndreaptă atenţia asupra forţelor de rezistenţă, provocate de *viscozitatea* fluidelor *naturale* (neperfecte). Acest fenomen fusese observat deja la studiul undelor lichide şi de aceea teoria lui s'a desvoltat înaintea aceleia a vârtejurilor. Primele cunoştinţe în această privinţă revin lui *Newton*, care în *Principiile* sale se exprimă astfel: „*Rezistenţa din cauza imperfecţiunei de mobilitate la alunecare (ex defectu lubricitatis) a particulelor fluide este, celelalte condiţiuni fiind aceleaşi, proporţională cu viteza lor de deformaţie*“.

Aceasta, în cazul unei variaţiuni continue a vitezei, după cum stabileşte cel dintâiu *de St. Venant* (1843), conduce raţional la proporţionalitatea cu derivatele vitezelor, din cari *Cauchy* (1827) a arătat că se compun vitesele de deformaţie, pe când, încă dinainte, *Navier* (1827) şi *Poisson* (1831) încercaseră a sprijini ipoteza prin consideraţiuni moleculare.

De aceleași considerațiuni se servește și *Stokes*, (1845) dând ecuațiile mișcărei fluidelor viscoase în forma lor astăzi întrebuințată, ecuațiuni stabilite independent și de *Navier* în Franța în bună concordanță cu experiențele lui *Poiseuille* asupra curenților lenți în tuburi înguste.

Tot *Stokes* demonstrează că vitesa medie între două plăci paralele, puțin distanțate între ele, posedă potențial de viteză, astfel că *Hele-Shaw* a putut produce pe cale experimentală asemenea mișcări potențiale.

De toți observatorii de altfel se stabilește că, între fluidul viscos și peretele solid nu există alunecare, cel puțin atâta timp cât vitesa medie a curentului rămâne în limite moderate. Faptul, că pentru vitese mai mari ecuațiile lui *Stokes* nu sunt valabile, era de așteptat prin ipotezele admise, în schimb produce surprindere faptul că, la întrecerea vitesei critice, stabilită de *Reynolds*, (1883), se produce, în mod brusc, o stare de mișcare diferită, *regimul turbulent*, cu care însă technicienii, puțin preocupați de cercetările fizico-matematice asupra viscozității, erau mai de mult familiarizați. Bazele acestei mișcări nu pot fi încă găsite de cei mai mari fizicieni ca *Lordul Rayleigh* (1878) și olandezul *H. A. Lorenz* (1897); în schimb însă este stimulat interesul comun și colaborarea dintre ingineri și fizicienii teoretici pentru explicarea acestui fenomen al turbulenței, deopotrivă de important practicește și științificește.

In afară de forțele de rezistență, provocate de frecare sau turbulență, mișcarea fluidelor este influențată și de *tensiuni superficiale*, cari lucrează în sensul de a micșora suprafața liberă. In cazul echilibrului acestie tensiuni, împreună cu gravitatea, determină formarea de picături, bășici, membrane lichide, a căror explicație a prezintat dificultăți fizicienilor din prima perioadă. Cel dintâiu *Clairaut* (1743) a recunoscut că e vorba de acțiuni moleculare de o intensitate cu mult mai mare ca a gravitațiunei, însă întocmirea unei teorii aproape complete a acestui fenomen este datorită lui *Laplace* (*Théorie de l'action capillaire* 1806—1807), fiind desvoltată mai departe de *Neumann* (1859), *Quincke* (1869), *Poisson* (1831, *Maxwell* (1875), *Lordul Rayleigh*, *Van der Walls*, *Plateau*, *Poincaré* (1895). Este interesantă influența dinamică a capilarității asupra mișcărei valurilor, care a fost observată mai întâi de *Scott Russell* (1844). La aceasta se atribue liniștirea unei suprafețe de apă printr'un strat subțire de ulei, care prin mărirea tensiunei superficiale se întinde mereu mai mult.

Fenomenele în chestiune şi alte analoage sunt studiate teoretic de *W. Thomson* (1871), *Lordul Rayleigh* (1883), şi *O. Reynolds* (1880), ale căror rezultate sunt expuse în excelenta Hidrodinamică a lui *Lamb*. Această carte arată stimularea în Anglia a cercetărilor teoretice prin observaţiune, pe când în Germania după *Helmholz* şi *Kirchhoff* urmează o stagnare. Motivul acestei stagnări ar trebui după unii căutat în direcţia critică a matematicienilor germani, cari nu se mai interesau de aplicaţiunile fizice. Adevărul este că în Germania Hidrodinamică a fost lăsată un timp în al doilea plan din cauza teoriei elasticităţei, a cărei constituire a ocupat nu numai puterile aproape ale tuturor fizicienilor teoretici, dar şi ale matematicienilor cari se interesau de fizică.

Evoluţia teoriei maşinilor rotative. Una din cele mai importante aplicaţiuni ale Hidrodinamicei este aceia a maşinilor hidraulice rotative. Precum s'a arătat, *Euler*, stimulat de scrierea profesorului *Segner*, întocmeşte teoria *rotei cu reacţie* menţionate, precum şi o teorie completă a *turbinelor*, deşi până atunci el nu văzuse o asemenea maşină. In lucrarea sa genială „*Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau (1754)*" *Euler* stabileşte formula, astăzi curentă, a momentului de rotaţie şi ecuaţia energiei apei motoare, recomandând, pentru o funcţionare favorabilă, intrarea apei fără ciocnire şi eşirea ei paralel cu axa. Pentru satisfacerea primei condiţiuni propune orânduirea de canale directoare, dând o schiţă schematică a unei turbine axiale, şi recunoaşte că momentul cuplului este independent de pierderile de sarcini (influenţate de forma canalelor), depinzând numai de condiţiile de intrare şi eşire a apei motoare. In felul acesta *Euler* epuizează aproape complet teoria *firului de curent*, necesară scopului urmărit, şi după ce abandonează pentru totdeauna acest subiect, consacrându-se numai cercetărilor ştiinţifice, anul următor descoperă ecuaţiile Hidrodinamicei devenite clasice, cari, aşa dar, sunt datorite unei iniţiative de ordin technic. Atât însă matematicienii, dominaţi de influenţa lucrărilor abstracte ale lui *Lagrange*, cât şi inginerii, lasă timp de 90 ani în uitare opera genială a lui *Euler* şi chiar roata hidraulică a lui *Segner*.

In 1827 francezul *Fourneyron* construeşte cu succes mai multe turbine *radiale*, ceeace îndeamnă pe *Poncelet* (1838) să prezinte Academiei un tratat *sur la théorie des effets mécaniques de la turbine Fourneyron*".

Combes perfecţionează teoria, introducând *coeficienţii de rezistenţă* (ca şi *Weissbach*, aproape simultan). *Redtenbacher* în cartea sa „*Theorie und Bau der Turbinen und Ventilatoren*“ (1844), completează studiile anterioare, dând norme de construcţie, fără însă să exercite mare influenţă.

Urmează tipuri noi de turbine: *Henschel* şi *Jonval* (1839), *Francis* (1849), *Zuppinger* (1844), *Schwamkrug* (1849), *Girard* (1851) şi *Pelton* (1882), întocmite în deobşte de ingineri pe consideraţiuni practice şi fără multă preocupare ştiinţifică, ceeace se întâmplă şi cu pompele rotative, socotite ca inversul turbinelor radiale şi construite la început de *Appold* (1848) şi *Gwynne* (1862). Diverşi teoreticieni lămuresc la aceste maşini condiţiunile de mişcare pe baza metodei lui *Poncelet*, rezultând oarecari reguli de construcţie numerice (*Grübler: Zur Théorie der Vollturbinen*, 1883).

După ce între timp (după prima propunere practică a lui *Schiele*, pe la 1887) turbina de aburi îşi face drumul ei victorios, *Zeuner* (1856) în *Theorie und Entwurf einer Reaktionsturbine mit äusserer Beaufschlagung* atrage atenţia asupra superiorităţei turbinei centripete (înainte chiar ca turbina Francis să fie cunoscută în Europa) şi, în lucrarea sa clasică *Vorlesungen über die Theorie der Turbinen* (1899), adună toate rezultatele cunoscute până atunci. El nu tratează însă şi *roţile de acţiune*, cari datează din cea mai îndepărtată antichitate, şi cari au un prototip şi în roata cu linguri românească, care pare a fi strămoşul roţei *Pelton*.

Cu acest fel de roţi se ocupă, în afară de *Poncelet*, *Redtenbacher* în cartea sa: (1846) *Theorie und Bau der Wasserräder*.

Inversul acestor roţi, cum sunt roţile cu palete, cari servă la propulsiunea vaselor, nu reuşeşte să capete o teorie satisfăcătoare din cauza nesiguranţei curentului de apă. Cu toate că asemenea dispozitive îşi au şi astăzi importanţa la navigaţia interioară pentru apele joase, interesul teoreticienilor este atras mai ales de *elicea*, imaginată şi încercată practic de *Ressel* (1827) la propulsiunea vaselor, după ce inversul său, sub forma de roţi de vânt, servise timp de secole la funcţionarea morilor.

De altfel pentru propulsiunea vaselor, cu deosebire la vitese mari de navigaţiune, intrând în consideraţie consumaţiuni mari de energie şi deci de combustibil (cărbune), a cărui depozitare micşorează capacitatea de încărcare a vasului, problema randamentului elicei putea interesa şi teoria şi practica.

Pe când însă *Ressel* şi imitatorii săi englezi concepeau acţiunea elicei asupra apei pur *static*, *Rankine* în lucrarea sa (1865)

The mecanical principles of the action of propellers socoteşte că aci este vorba de reacţia unui curent de apă, care prin înaintarea vasului este adusă propulsorului, accelerându-se înapoi. Această creştere a vitezei ar trebui să fie proporţională cu *alunecarea* (*slip*), calculată din pasul elicei şi înaintarea vasului, constituind o pierdere de energie inevitabilă, ce se adaugă la acea produsă prin rotaţia vinei de apă şi la lucrul cheltuit pentru învingerea rezistenţelor pasive. Pe de altă parte *Froude* (1883) publică metoda sa de investigaţie asupra elicei, bazată pe forţele, determinate empiric la deplasarea oblică prin apă a unei plăci. Defectul ambelor concepţii constă după *Lorenz* în calculul pur static al momentului de rotaţie din înclinarea aripei faţă de direcţia ei de mişcare. Acesta cel d'întâi în a sa *Theorie und Berechnung der Schiffspropeller* (1906) arată că, atât pentru momentul cuplului cât şi pentru transformarea energiei elicei se aplică ecuaţia momentului din teoria turbinelor, dată de *Euler*, şi care pe lângă calculul energiei de rotaţie din vâna de apă a elicei permite a se vedea că partea centrală a elicei ar trebui să rămână fără efect, deoarece acolo apa se roteşte cu vitesă constantă. De aci rezultă un calcul al celei mai mici bucele permise şi al variaţiunei axiale şi radiale a pasului în concordanţă cu experienţa, cu toate că se face ipoteza unei afluenţe *simetrice* a apei, deci a unui număr infinit de aripi.

Asupra importanţei unor asemenea curenţi cu axă de simetrie, chiar înainte atrăsese atenţia *Prásil* în tratatul său *Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationsräumen* (1903), după care *Lorenz* a fost condus să stabilească *teoria bidimensională a rotilor* (1905), de unde a luat naştere şi teoria mai sus menţionată a propulsorului de vase. La această lucrare se presupune acţiunea aripelor în număr infinit înlocuită printr'un câmp de forţă, care exercită asupra fluidului motor o *acceleraţie forţată*, în mod continuu variabilă în stator şi rotor, care, după cum arată *Bauerfeld*, este perpendiculară pe palete în cazul fluidelor perfecte. Dacă se mai cere o transformare de energie egală a tuturor elementelor fluide în timpuri egale. rezultă o funcţie de curent precisă, care determină forma pereţilor cu palete cilindrice, cum ele se construesc aproximativ la pompele rotative mai noi,

Lucrarea lui *Lorenz Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder* (1906) stârneşte o vie discuţie din partea lui *Prásil* şi *von Mises*, cari combat noţiunea acceleraţiei forţate, precum şi din partea lui *Stodola* şi *Bauerfeld*, cari caută să concilieze diversele puncte de vedere. *Pfarr*, unul din cei mai abili constructori de tur-

bine, în prefaţa tratatului său, important din punct de vedere practic: *Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb* (1907), atrage atenţia asupra pericolului unei interpretări analitice a fenomenelor, cari uneori prejudiciază libera cunoaştere a condiţiilor fizice efective.

In orice caz, după cum arată printre alţii *Stodola* în cartea sa *Zur Theorie der Dampfturbinen* (1907), faţă de dificultăţile, foarte rar până acum învinse, pe cari le întâmpinăm la integrarea ecuaţiilor generale ale hidrodinamicei, nu ne putem dispensa încă de teoria firului de curent. In schimb această teorie nu ne poate da nimic privitor la constituirea profilului roţei şi a formei paletelor, a căror determinare şi astăzi se face în deobşte grafic, cu ajutorul experienţei practice.

Maşini sonice. In 1918 apare în limba engleză lucrarea *Theory of sonics* a colegului nostru *Gogu Constantinescu* asupra unei noi ramuri a Hidrodinamici, numită de dânsul *Sonicitate*, cu numeroase aplicaţiuni la construcţia de *maşini sonice*, cari imită aproape toate genurile de maşini electrice. Această creaţie genială a unui român îndreptăţea speranţele cele mai optimiste, însă în practică s'a govedit că transmisia sonică, prin vibraţiunile la cari supune conductele de legături, oboseşte peste măsură materialul, din care cauză câmpul de aplicaţie al acestei descoperiri a fost până astăzi limitat.

Desvoltarea Hidraulicei practice. Prin ecuaţiile lui *Euler* problema *scurgerei prin orificii* şi-a găsit soluţia teoretică pentru fluidele perfecte. Problema influenţei pereţilor şi schimbărei bruşte a secţiunei de scurgere este atacată de *Borda* (1773—1799), care desvoltă formula sa întrebuinţată şi astăzi pentru pierderea de energie suferită prin ciocnirea hidraulică, studiind şi experimental contracţia vinei la orificiile în perete subţire. Cum *Borda* n'a putut explica acest fenomen, ca şi *Newton*, prin scurgerea paralelă, caută să suplinească nepotrivirea printr'un coeficient empiric.

Acest procedeu al corectărei prin *empirism* a formulelor obţinute teoretic, cu renunţarea la o explicare ştiinţifică, devine un obicei pentru Hidrodinamica practică, în deobşte denumită *Hidraulică*, şi contribue tot atâta la îndepărtarea partizanilor ei de aceia ai Hidrodinamicei exacte, cât şi formularea abstractă a acestei ştiinţe de către *Lagrange*.

Bossut (1730—1814) îşi dădea bine seama de acest contrast, exprimându-se în tratatul său elementar de Hidrodinamică astfel: „malheureusement ces calculs sont si compliqués par la seule na-

„ture de la chose, qu'on ne peut les regarder que comme des vérités „géométriques, précieuses en elles mêmes, mais non comme des sym„boles propres à peindre l'image sensible du mouvement actuel et „physique d'un fluide".

Materialul empiric este îmbogățit de cei doi *Michellotti*, tatăl și fiul, iar *Dubuat* (1732—1787) studiează *scurgerea în canale deschise* (1787) prin formule complicate, utilizând principiul exprimat de *Brahms* (1854) al pantei piezometrice pentru învingerea rezistenței la scurgere, pe care *Chésy*, cel d'întâi, o socotește proporțională cu raza hidraulică a secțiunei. Urmează apoi formula binomă a lui *Prony*, care, pentru a se ține seama de asperitățile pereților, primește modificări la coeficienți de către *Weissbach* (1840), *Darcy* (1858) și *Bazin* (1865 și 1897), pe când *Gaukler* (1868), *Hagen* (1881) și *Reynolds* (1883) propun formule monome cu exponenți. Cea mai complicată din toate formulele este aceea a lui *Ganguillet* și *Kutter*, calculată în tabele pentru cel mai mic pârâu până la cel mai mare curs de apă.

Bazin dă o formulă (1865) pentru *variația vitesei cu adâncimea*, găsind că ea crește în jos după o parabolă. El mai atrage atenția (1887) și asupra pulsațiunei vitesei, care este în legătură cu pătrunderea turbilionară a firelor între ele și crește cu asperitatea pereților.

Bélanger se ocupă (1828) de *scurgerea variată* a apei în canale deschise. Pentru curba de remuu s'a menținut până astăzi formula lui *Bresse* (1860) și *Dupuit* (1863), care dă o explicare plausibilă și a saltului superficial, observat de *Bidone* (1829) și calculat de *Bélanger*.

Deversorul este studiat de *Poleni* (1767), dar mai exact de *Dubuat* (1786) și de *Weisbach* (1841), care ține seamă și de vitesa din amonte, apoi de *Lesbros* (1852), *Boileau* (1854) și de *Boussinesq*, care supune problema unei analize amănunțite, dar prea complicate față de nesiguranța ipotezelor.

Urmează diferite formule pentru pierderea de energie la coturi, curbe etc., însă cu puțin succes.

Teoria *scurgerei apei subterane* este desvoltată de *Darcy*, *Boussinesq*, *Maillet* și *Forheimer* și din punct de vedere hidrodinamic se poate considera astăzi ca sigură.

In privința *rezistenței*, încercată de un corp mișcat într'un lichid, cum teoria lui *Euler* nu corespundea cu realitatea, Ministrul francez *Turgot* însărcinează pe membrii Academiei *d'Alembert*, *Bossut* și *Condorcet* să facă încercări pe modele, cari, contra vederilor

lui *Euler*, confirmă legea pătratică a rezistenței, fără însă a se putea clarifica influența înclinării pereților corpului.

In special apare curioasă constatarea că, în condițiuni egale, un model mai lung încearcă o rezistență mai mică de cât unul mai scurt, și totodată se observă acțiunea favorabilă a unei pupe ascuțite.

Englezul *Beaufoy*, după experiențe numeroase, făcute în contu Societății pentru Perfecționarea Arhitecturei Navale (1793—1798), desparte rezistența *prorei*, considerată ca o acțiune de ciocnire, de rezistența *pupei*, care provoacă o depresiune și deci o asipirație, pe când rezistența pereților laterali o atribuie frecării. Efectul favorabil al pupei ascuțite este confirmat de el, conducându-l a propune ca să se apropie lărgimea maximă a vasului de proră, mai mult de cât de pupă, cu o cincime a lungimei. Aproprierea obținută astfel a formei vasului de aceea a peștelui nu este de fapt realizată de cât o sută de ani în urmă, sub influența creșterei viteselor întrebuințate.

O nouă perioadă este marcată de lucrările lui *Rankine* (1863-1870) și *Froude* (1872—1878), cari descompun rezistența vasului în o *frictiune peliculară* (skin resistance), *rezistența turbilionară* (eddy resistance) și *rezistența valurilor* (wave-resistance), pe când *Riehn* (1882) unește ultimele două rezistențe într'una singură. Incercările lui *Froude* și ale fiului său arată că rezistența unită, dată de valuri și vârtejuri, este aproximativ proporțională cu pătratul vitezei, pe când rezistența de frecare, cu puterea 1,825 a acesteia, neascultând deci de regula modelelor; acest rezultat deșteaptă un viu interes printre fizicienii englezi. Experiențele lui *Calvert* (1893) asupra *ante-curentului* sunt găsite, după cum arată *Lorenz*, de acord cu legea de proporționalitate pătratică, iar pentru frecarea peliculară ele au dat o proporționalitate directă. Cum însă influența apei antrenate prin frecare este covârșitoare, se explică în mod firesc exponentul de 1,825.

O formulă mai exactă este dată de *Lorenz*.

Revenirea la Hidrodinamica lui Euler și Helmholz și progresele noi ale Hidro- și Aerodinamicei. Din cauza dificultății tratării matematice a mișcării fluidelor, nu s'a putut rezolva riguros problema generală a mișcării de cât numai în cazuri simple, d. e. în cazul unui curent uniform contra unei plăci infinit de întinse sau în cazul scurgerei prin canale de o anumită formă de secțiune.

Numai grație unor ipoteze extreme a fost posibil a se urmări teoretic fenomenele hidrodinamice. Astfel, pe de o parte neglijându-se viscozitatea s'a putut construi hidrodinamica clasică a fluidului perfect, teren care a fost explorat de matematicieni atât de amănunțit, în cât se poate considera chestiunea aproape epuizată. Pe de altă parte, introducerea viscozității, cu neglijarea însă a forțelor de inerție, acolo unde aceasta este admisibil, a permis deasemenea o tratare aproximativă a problemei.

In timpurile mai recente s'au făcut încercări de a se rezolva problema completă. Astfel *Oseen* din Upsala, în cazul vitezelor mici menține forțele de inerție cu o primă aproximație, iar *Prandl* din Göttingen, într'o conferință la congresul Matematicienilor din Heidelberg 1904, arată calea pentru tratarea fluidelor de o viscozitate foarte mică.

La fluidele materiale acțiunea viscozității intervine numai într'un strat foarte subțire, numit de dânsul *„strat limită"* (Grenzschicht) pe suprafața de contur a corpurilor muiate sau înconjurate. Pe când fluidele perfecte admit o alunecare pe suprafața de contur, fluidul, cât de puțin viscos, aderează pe corp prin particulele lui în contact cu suprafața corpului.

In stratul limită subțire avem astfel o variație foarte rapidă a vitesei, dela vitesa corpului la aceea a curentului, cu care variație efortul de viscozitate este proporțional.

Cât timp acest strat subțire, în care se limitează acțiunea viscozității, rămâne pe corpul înconjurat, spectrul curentului real nu diferă în esență de acela al unui fluid perfect. Dacă însă intervine *deslipire* sau *decolare*, spectrul se schimbă apreciabil, stratul limită transformându-se în vârtejuri (cazul unei sfere sau a unei plăci ce se deplasează perpendicular pe direcția curentului). Este deci important a se ști când și în ce condiții se produce deslipirea stratului limită, fiindcă, în cazurile când această nu se produce, este permis a considera și a trata fluidul ca perfect, pe când în celelalte cazuri trebue făcut mai întâi ipoteza că există o oarecare viscozitate, care apoi se face să tindă către zero, obținându-se astfel în locul formei de curent, pe care o dă fluidul perfect, deslipirea curentului și formarea de vârtejuri.

Forma curentului este în legătură cu *rezistența fluidului*. Această formă și deci și rezistența în chestiune este atribuită de hidrodinamicienii germani și englezi numai prezenței viscozității, pentru a explica faimosul paradox al lui *Euler* sau *d'Alembert*, cari, pentru un fluid perfect, au arătat că această rezistență trebue să fie nulă.

Există totuşi, mai ales în Franţa, şi partizanii părerei că viscozitatea trebue considerată ca o cauză accesorie, care vine să turbure numai fenomenul principal al rezistenţei, cu atât mai mult cu cât vitesele sunt mai mici, fenomenul însuşi fiind independent de viscozitate. Pentru a funda această teorie se respinge soluţia cu potenţialul regulat, care ea conduce prin calcul la paradoxul lui *d'Alembert*.

Cei d'întâi *Helmholz* şi *Kirchhoff* se gândiseră că explicarea rezistenţei putea fi căutată în existenţa *suprafeţelor de discontinuitate* pentru viteză. *Kirchhoff* şi *Lordul Rayleigh* au pus în evidenţă soluţiuni ale ecuaţiilor fundamentale, cari comportă suprafeţe de discontinuitate în cazul când fluidul se scurge printr'un orificiu subţire într'o masă de apă în repaus şi în cazul translaţiei unui plan subţire înclinat cu margini paralele, infinit de întins în sens normal vitezei relative.

Aceste soluţiuni *de a doua speţă* ale potenţialului regulat comportă suprafeţe de discontinuitate, cari lasă înapoia corpului o zonă stătătoarea, în care vitesa este peste tot nulă şi presiunea constantă. Forma suprafeţelor de discontinuitate nu depinde de vitesă şi ele se întind la infinit. S'a constatat însă că, în cazuri mai complicate ne găsim în faţa unei infinităţi de soluţiuni de a doua speţă, şi, în asemenea cazuri, pentru a găsi soluţia fizică care este unică, ar fi necesar a se introduce consideraţiuni de stabilitate, sau iarăşi o oarecare viscozitate care să tindă apoi către zero.

In cazul fluidului viscos suprafeţele de discontinuitate devin *suprafeţe limite*, cari separă din curentul general înapoia corpului o dâră, ce nu mai este în repaus, ci agitată pe loc de mişcări ciclice. Importanţa relativă a viscozităţei creşte pe măsură ce ne depărtăm de solid, care este cauza perturbaţiei.

Contrar suprafeţelor de discontinuitate, suprafeţele limite, datorite viscozităţei, nu se întind la infinit şi depind de vitesa relativă.

La teoria *dârelor* (sillages) în legătură cu mişcarea permanentă a unui solid într'un fluid perfect, au contribuit, pe lângă savanţii citaţi mai sus, *Levi-Civita*, *Brillouin*, *Cisotti*, *Villat*, *Thiry*, iar cu problema condiţiunilor la limită a unei viscozităţi mici, care tinde la zero, *Oseen*, *Zeilon*, *Villat*.

Studiul analitic, făcut de *Kármán*, al vârtejurilor alternate observate de *Bénard* în dosul unui corp cu coadă obtusă, deplasat într'un fluid, arată, prin frapanta concordanţă între calcul şi realitatea, că rezistenţa fluidului în acest caz provine în deobşte din formarea acestor vârtejuri.

Problema scurgerii prin orificii și deversoare, precum și aceea de curenți de tot felul, este atacată pe cale teoretică pe baza metodelor lui *Helmholz* și *Kirchhoff*, *de Lamb*, *Ciostti*, *von Mises*, *Lauck*, etc, obținându-se pe această cale și unii coeficienți de contracție sau de scurgere în concordanță impresionantă cu experiența.

Cu anumite probleme de curenți potențiali *Dorin Pavel*, elevul lui *Prășil* și *Stodola*, se ocupă în teza sa: *Ebene Potenzial-Strömungen durch Giffer und Kreiselräder* (*Rascher 1920*).

Asupra curenților potențiali la fluidele cu viscozitate *G. Hamel* face o analiză riguroasă în o serie de lucrări (V. D. L. Verlag G. M. H. Berlin), înbogățind teoria cu puncte de vedere noi.

Progresele realizate în ultimele decenii în studiul și aplicațiunile *Hidrodinamicei* se datoresc cu deosebire avântului mare luat de aviație, pentru care s'a creeat o știință aproape perfectă, *Aerodinamica*, care nu este în fond de cât o ramură, considerabil desvoltată, a Hidrodinamicei clasice.

Datele din ultima vreme dinaintea războiului mondial, cu cari câțiva precursori ca: *Carlay*, *Penaud*, *Renard*, *Mouillard*, *Lilienthal*, *Langley*, *frații Wright* au conceput și creiat aviația, erau foarte rudimentare. Nu se posedau pe atunci de cât noțiuni vagi asupra rezistenței aerului, în special la mișcarea planurilor oblice în aer, unii fiind partizani ai formulei în sinusul unghiului de incidență, alții ai formulei în sinus pătrat. De suprafețe de sustentație curbe nu era încă vorba. Proporționalitatea rezistenței cu pătratul vitezei corpului, prin analogie cu ceeace se petrece și în apă, era singura formulă acceptată de toată lumea. *Drzwiecki*, care a căutat să stabilească teoria aeroplană a sborului păsărilor, s'a întemeiat tot pe elementele cunoscute din hidrodinamică, arătând și existența *incidenței optime*, noțiune care i-a servit mai târziu ca bază la teoria elicei propulsive, atât celei marine cât și celei aeriene.

Aci este locul a menționa și contribuția românească adusă aviației prin *Traian Gruia*, care în 1906 reușește primul sbor (o săritură de 4-5 *m*) cu aparatul său, *Aurel Vlaicu*, care construește primul avion original românesc (1910) cu o viteză de 100 *km/oră*, *G. de Bothezat*, care trece o teză la Paris asupra stabilității aeroplanului, fiind deci printre primii teoreticieni în acest domeniu, *Vasilescu Karpen*, care în o serie de publicații (1913-1924) tratează chestiunea sborului plutit al păsărilor (vol à la voile), dând

în particular explicaţia acestui gen de sbor pe vânt variabil în spaţiu şi timp.

In general primele teorii ale aeroplanului au fost fundate pe cunoştiinţele din *Hidrodinamică*, iar adevărata ştiinţă *Aerodinamică* s'a creat în urmă, după ce avionul realizase primele cuceriri ale văzduhului.

Mai târziu s'a simţit nevoia cercetărilor mai aprofundate, atît în teorie cât şi pe terenul practic; se creează laboratoare, unele pentru a se urmări diverse cercetări de ordin general teoretic, altele specializate în chestiuni de ordin practic, în legătură cu construcţia aeroplanelor şi dirijabilelor.

Pe măsură ce materialul de observaţiuni creşte şi legile generale ale *Aerodinamicei* se precizează tot mai mult, se constată perfecta lor concordanţă cu acelea ale *Hidrodinamicei* lui *Newton*, *Bernoulli*, *Euler*, *Lagrange* şi *Helmholz*.

Pe de o parte, graţie documentărei bogate şi materialului considerabil de încercări, de care se dispune acum, iar pe de altă parte graţie unui utilaj matematic foarte desvoltat, *Hidro-şi Aerodinamica* devin discipline practice, formând una din cele mai importante ramuri ale Mecanicei, raţionale si aplicate.

La elaborarea acestei fuziuni între două ramuri, de fapt ale aceleiaşi ştiinţe, contribue în mod deosebit *Jukowski*, matematician distins, care urmăreşte cu râvnă studiile şi discuţiile din jurul problemelor aeronautice şi publică diferite articole ştiinţifice şi un tratat de Aerodinamică *). El îşi pune problema de a determina pe cale teoretică împingerea încercată de o aripă, care se deplasează într'un fluid sub un unghiu oarecare de incidenţă. Mai întâiu trebuia găsită cauza acestei rezistenţe, care mult timp a fost căutată acolo unde nu exista.

Euler, în paradoxul său celebru, arătase că rezultanta tuturor forţelor asupra unui corp ce se deplasează într'un fluid cu vitesă uniformă, fără a produce vârtejuri, este nulă.

Lamb tratase amănunţit cazul unei plăci, întâlnind un curent fluid sub o anumită incidenţă, şi găsise că toate forţele se reduc la un cuplu, care tinde să învârtească placa. *Newton*, considerând aerul compus dintr'un număr mare de particule, care ar isbi o

*) După acest tratat, tradus în limba franceză în timpul războiului mondial, am început primele prelegeri de Aerodinamică la Şcoala Politechnică din Bucureşti până la venirea D-lui *Dr Ing. Carafoli*, Profesorul titular al catedrei, ulterior create şi care a întocmit în incinta şcoalei primul şi unul din cele mai reuşite tunele aerodinamice.

placă de suprafață S sub un unghiu de incidență α cu viteza V, propusese o formulă, care însă sub α mic dă pentru împingere valori prea mici față de cele reale.

Forța de sustentație (portanță) rezultată din acest calcul era considerabil redusă, ceeace a contribuit multă vreme ca lumea științifică să se îndoiască de posibilitatea sborului avioanelor.

Helmholz și *Kirchhoff*, cu ipoteza lor că curentul nu înconjoară întreg corpul, ci în dosul lui rămâne o regiune de fluid mort, despărțit prin suprafețe de discontinuitate, dăduse în cazul plăcei o formulă, care conducea la valori de același ordin de mărime cu realitatea, nu însă cele exacte.

In 1890 *Jukowski* expune o metodă pentru determinarea rezultantei exercitate asupra unui profil, compus din segmente rectilinii.

Mai târziu aceeași chestiune este tratată de *Levi-Civita* și de *Villat*, cari reușesc să determine această forță pentru contururi de orice formă. Lucrările lor completează teoria lui *Kirchhoff*.

Principalele experiențe asupra planurilor înclinate în aer sunt datorite lui *Eiffel*, *Riabouchinsky* și *Rateau*. Experiențele confirmă că pentru unghiuri de incidență până la ca. 15^0 forța este proporțională cu sinusul unghiului, rezultat analog cu ceeace găsiseră *Lordul Rayleigh* și *Joewell* pentru apă.

Magnus, un eminent fizician experimentator, făcuse o descoperire, publicată în analele *Poggendorf* din 1853 asupra deviațiunei proectilelor. Studiind curentul de aer în jurul unor corpuri în formă de proectile, cari se rotesc foarte repede (curentul fiind perpendicular pe axa lor), a găsit că ele încearcă nu numai o rezistență în direcția curentului ci și o forță laterală, perpendiculară pe curent și pe axă, și anume în spre partea unde viteza de rotație și viteza relativă se adună. Acest efort, care crește cu viteza relativă de translație, era atribuit disimetriei produse.

Cu mult mai târziu *Lordul Rayleigh* desvoltă teoria pentru fenomenul analog al deviărei laterale a mingilor de tenis și găsește că acțiunea unită a *circulațiunei* și a translației măresc presiunea într'o parte și o micșorează în partea opusă, dând o rezultantă laterală.

Modul cum decurge fenomenul la un curent plan al unui fluid perfect rezultă imediat din figura care reprezintă compunerea mișcărei unui vârtej cu un curent de translație față de vârtej. O linie de curent închisă, din spectrul respectiv, se poate considera rigidă, obținându-se astfel conturul adică profilu

suprafeței limitative a unui corp, care primește solicitarea laterală menționată, numită *portanță* (sau forță de sustentație sau impingere) analog cu a unei aripi de avion, elice sau paletă de turbină.

Lanchester în Anglia, făcând experiențe (1891) cu suprafețe având secțiuni curbate ca aripa păsărilor, capabile de sbor susținut, confirmă avantajele acestei forme, deduse din considerațiuni teoretice asupra aripei infinite, și în 1907 publică prima sa lucrare *Aerodynamics* fără desvoltări matematice, dar cu multă intuiție, care îl conduce și la percepția rezistenței, numită astăzi *indusă*, a aripei finite.

Kutta, în o lucrare a sa din 1902, întrebuințând metoda transformărei conforme, raportează mișcarea potențială, exterioară unui asemenea profil, la cazul unui arc de cerc, creind teoria unei suprafețe portante curbe. El arată că paradoxul lui *Euler* nu este exact de cât în cazul particular când potențialul vitezelor, în tot spațiul ocupat de fluid, este o funcție continuă *uniformă*, în cazul unei funcțiuni *multiforme*, circulația vitezelor putând avea o valoare finită.

In 1905 *Jukowski* demonstrează o teoremă de mare importanță: *Când un curent de o vitesă V la infinit se scurge în jurul unui contur iar circulația vitezelor în jurul acestui contur este* Γ, *rezultanta presiunilor fluidului pe contur este egală cu produsul vectorului* $\overline{V}$ *cu* Γ *și cu densitatea fluidului. Direcția forței se obține învârtind cu* 90° *vectorul* $\overline{V}$ *în sensul opus circulațiunei.* Această teoremă se aplică la ori ce formă de contur iar metoda reprezentărei conforme permite în multe cazuri a se rezolvi problema.

Pe când *Kutta*, în lucrarea sa amintită din 1902, plecând dela același punct de vedere, dăduse o metodă cam complicată, pentru a determina împingerea unui curent pe o placă concavă în arc de cerc, și numai în cazul particular când coarda este paralelă cu curentul, în 1910 *Tchapliguine* expune o metodă pentru rezolvarea aceleași probleme pentru orice înclinare a coardei arcului față de direcția curentului. Acesta mai semnalează existența unei discontinuități în fenomen, îndată ce unghiul de incidență întrece o limită, care depinde de vitesa curentului.

In 1910 *Jukowski* dă expresiile analitice ale rezistenței încercate de trei profile de aripă *groase*, derivate din arcul de cerc, unul în formă de aripă de pasăre, al doilea pisciform lungueț și al treilea format de întretăerea a două arcuri de raze diferite, vecin de tipul aripei *Antoinette* și aripei *Rateau*. Prin experiențe

în laborator el verifică cu succes teoria sa, experienţele fiind făcute în condiţiuni concordante cu cele admise în teorie, adică pentru o *aripă infinită*, deci fără pierderi marginale. In fine face cercetări teoretice şi experimentale asupra deplasărei *centrelor de împingere* şi a *rezistenţei la avansare*, corectând expresia dată de *Kármán*.

Cu lucrările mai sus citate *Aerodinamica* părăseşte empirismul exclusiv, pentru a intra în domeniul ştiinţific. Rezultatele observaţiunilor şi experienţelor sunt supuse analizei riguroase a metodelor *Hidrodinamicei* şi se formulează metode de calcul de o aplicare uşoară a legilor generale ce s'au putut stabili, ajungându-se la determinarea a priori a formei şi dispoziţiilor celor mai bune de adoptat.

In special se stabilesc diferite metode pentru trasarea profilelor de aripi de către *von Mises*, elevul lui *Prandtl*, care tratează (1920) problema formelor corespunzătoare unor condiţii de sustentaţii date, apoi de către *W. Müller* (1923) şi de către *E. Carafoli*, care împreună cu *E. Toussaint* (1928), trecând în revistă diferitele metode pentru calculul profilelor şi distribuţiunilor de vitesă, dau o nouă desvoltare teoriei, obţinând profile de un caracter foarte general. *E. Carafoli* mai tratează problema rotaţiunei combinată cu cea de translaţie, precum şi influenţa aripioarelor.

Calculul portanţei după metoda lui *Jukowski* se face în ipoteza că scurgerea este plană sau în două dimensiuni, avionul având o lungime infinită, şi că fluidul este perfect, scurgerea făcându-se tangenţial la coada avionului. Viscozitatea nu are alt rol de cât de a explica origina circulaţiunei.

Extinderea teoriei la cazul avionului finit, adică rezolvarea analitică a problemei în trei dimensiuni, cu care se ocupase şi *Lanchester* experimental, revine lui *Prandtl* din *Göttingen*. Această teorie prin calculul „*rezistenţei induse*“ dă rezultate în concordanţă satisfăcătoare cu experienţele. La mişcarea în două dimensiuni rezistenţa în chestiune este nulă, restul foarte mic, datorit viscozităţei, fiind numit *rezistenţă de profil*.

Printre diversele publicaţiuni asupra *Aerodinamicei* sunt demne de semnalat eminentele tratate ale lui *Fuchs-Hopf* şi *Grammel*.

Din tot ce se ştie şi s'a publicat până acum se poate afirma, că ştiinţa nouă pe care o datorăm lucrărilor lui *Kutta*, *Jukowki* şi *Prandtl* este o completare a Hidrodinamicei clasice, care dealtfel, după un veac şi jumătate capătă o importanţă practică deosebită pentru ingineri şi constructori.

La realizarea însă a progreselor atât de remarcabile şi rapide din ultima vreme, pe lângă punerea la punct a teoriei, au contribuit de bună seamă şi cercetările numeroase şi minuţioase pe modele reduse, efectuate în diverse laboratoare de *Hidro-* şi *Aerodinamică*, de către numeroşi cercetători.

V. Vâlcovici, elevul lui *Prandtl*, în teza sa *Uber discontinuirliche Flüssigkeitsbervegungen mit zwei freien Strahlen, Göttingen 1913*, aplică metoda lui *Levi-Civita* la studiul mişcărei permanente a unui fluid incompresibil, care pornind din duză (ajutaj) întâlneşte un obstacol solid şi utilizează rezultatele pentru a decide între tipul de laborator aerodinamic cu vână liberă sau cel cu tunel închis.

In practica curentă din laboratoarele de *Hidro-* şi *Aerodinamică*, teoria *similitudinei mecanice*, inaugurată de *Newton*, ia o importanţă deosebită, atât pentru cercetările menţionate, cât şi pentru construcţia acelor forme, pentru cari teoria nu este în stare să procure toate elementele necesare.

Printre diversele lucrări publicate în acest domeniu, în care nu exista încă o definiţie clară şi o formulare generală precisă, este locul poate a menţiona şi o contribuţie a noastră asupra *structurei formulelor şi sinţezei legilor de similitudine mecanică*, prezintată la *Congresul Internaţional de Mecanică Technică din Stockholm* (1930)*). Graţie introducerii noţiunei de *măsură specifică*, care s'a arătat fecundă, această teorie, pornită din *Hidrodinamică*, găseşte aplicare şi în ori care altă ramură fizică sau technică, d. e. în *Termodinamica*, *Electrotechnica* şi *Resistenţa Materialelor*.

*) *Germani D.* Sur la structure des formules et la synthèse des lois de similitude en mécaniqe (Stockholm, Sitzg. v. 24-29. VIII. 1930). Verh. 4 internat. Kongr. techn. Mech. 2,419-411 (1931).

R21 (G)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY